# 台北區 106 年(105 學年度)高三上
# 第一次學測聯合模擬考數學試題

俞克斌老師編寫

**第壹部分：選擇題**

**一、單選題**

1. 在數線上，滿足$|x-2|+|x+3|\le 9$且$|x-2|-|x+3|\le 2$的整數總共有多少個？
(1) 5 個　(2) 6 個　(3) 7 個　(4) 8 個　(5) 9 個。　　【106 台北區聯合學測模擬考①】

答：(2)

解：$\begin{cases}|x-2|+|x+3|\le 9 & \Rightarrow -5\le x\le 4\\ |x-2|-|x+3|\le 2 & \Rightarrow x\ge -\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow -\dfrac{3}{2}\le x\le 4\xrightarrow{x\in Z}x=-1,0,1,2,3,4$

2. 已知$k$、$t$均為實數，$k\cdot 4^t=6$，且$k\cdot 8^t=30$，則$t$的值為下列何者？
(1) $\log_5 2$　(2) $\log_5 4$　(3) $\log_2 5$　(4) $\log_4 5$　(5) $\log_5 10$。【106 台北區聯合學測模擬考①】

答：(3)

解：相除$\Rightarrow 2^t=5\Rightarrow t=\log_2 5$

3. 某綜藝節目中，挑戰者可選擇一個特製的公正骰子，與主持人持有的公正骰子（點數為 1、2、3、4、5、6）同時擲出，觀察兩人擲出的點數。若挑戰者骰子點數為主持人骰子點數之倍數時，則挑戰者獲勝！試問挑戰者選擇的特製骰子為下列哪一個時，獲勝機率最高？
(1)點數為 1、2、3、4、4、4　(2)點數為 1、1、2、2、3、3
(3)點數為 1、1、1、2、2、2　(4)點數為 1、1、2、3、4、5
(5)點數為 2、2、3、3、3、3。　　【106 台北區聯合學測模擬考①】

答：(1)

解：(1)獲勝組合$\Rightarrow$(主持,挑戰)$=\begin{cases}(1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(1,4)(1,4)\\(2,2)(2,4)(2,4)(2,4)\\(3,3)(4,4)(4,4)(4,4)\end{cases}\Rightarrow$共 14 組

(2)獲勝組合$\Rightarrow$(主持,挑戰)$=\begin{cases}(1,1)(1,1)(1,2)(1,2)(1,3)(1,3)\\(2,2)(2,2)(3,3)(3,3)\end{cases}\Rightarrow$共 10 組

(3)獲勝組合$\Rightarrow$(主持,挑戰)$=\begin{cases}(1,1)(1,1)(1,1)(1,2)(1,2)(1,2)\\(2,2)(2,2)(2,2)\end{cases}\Rightarrow$共 9 組

(4)獲勝組合$\Rightarrow$(主持,挑戰)$=\begin{cases}(1,1)(1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)\\(2,2)(2,4)(3,3)(4,4)(5,5)\end{cases}\Rightarrow$共 11 組

(5) 獲勝組合$\Rightarrow$(主持,挑戰)$=\begin{cases}(1,2)(1,2)(1,3)(1,3)(1,3)(1,3)\\(2,2)(2,3)(3,3)(3,3)(3,3)(3,3)\end{cases}\Rightarrow$共 12 組

故機率$P_1>P_5>P_4>P_2>P_3$

4. $a$、$b$為整數，若方程式$x^3-ax^2+bx+15=0$有三個整數根，則$a$可能情形有多少種？
(1) 4 種　(2) 6 種　(3) 7 種　(4) 8 種　(5) 9 種。　　【106 台北區聯合學測模擬考①】

答：(3)

解：由韋達定理得知，三根之積為$-15$，

故可能的整數根組合為$(15,1,1)$、$(15,-1,-1)$、$(-15,-1,1)$

$(5,3,1)$、$(-5,-3,1)$、$(-5,3,-1)$、$(5,-3,-1)$

則三根之和為$a=17,13,-15,9,-7,-3,1$共七種

5. 茜茜是個喜愛烹飪的高中生，有一天她將一條鮭魚從冷凍庫拿出來解凍。茜茜希望在烹煮時，魚的溫度至少為20℃以上，

| 時間(小時) | 0 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 魚的溫度(°C) | –4 | –3 | –2 | 1 |

因此茜茜以「小時」為單位，紀錄解凍後的時間與溫度，如附表所示，舉例來說，拿出來解凍2小時後，魚的溫度為$-2$℃。茜茜利用此4筆資料來做一個次數為3次的插值多項式，用來模擬真實的溫度函數。試利用此三次多項式來估計，拿出來解凍至少幾小時（整數）後，茜茜就可以開始調理鮭魚？

(1) 6小時　(2) 7小時　(3) 8小時　(4) 9小時　(5) 10小時。　【106台北區聯合學測模擬考①】

答：(4)

解：$f(x)=a(x)(x-1)(x-2)+b(x)(x-1)+c(x)-4$

$f(1)=c-4=-3\Rightarrow c=1$

$f(2)=2b+2-4=-2\Rightarrow b=0$

$f(4)=24a+0+4-4=1\Rightarrow a=\dfrac{1}{24}$

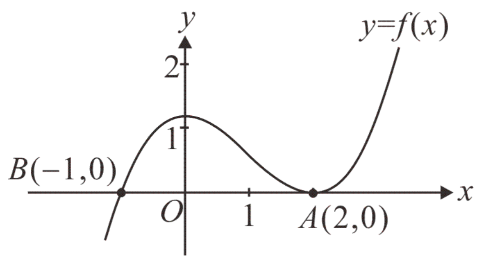
$f(x)=\dfrac{1}{24}(x)(x-1)(x-2)+(x)-4\Rightarrow\begin{cases}f(8)=18\\ f(9)=26\end{cases}$

## 二、多選題

6. 三次多項式$y=f(x)$的圖形如圖所示，

已知$A$點坐標為$(2,0)$，$B$點坐標為$(-1,0)$，

請問下列哪些選項正確？




(1) $f(-1)=0$

(2) $f\left(\dfrac{1}{3}\right)<f\left(\dfrac{2}{3}\right)$

(3) $f(x)<0$的解為$x<-1$

(4) $f(-x)\ge 0$的解為$x\le -1$

(5) $x\cdot f(x)<0$的解為$-1<x<0$。　【106台北區聯合學測模擬考①】

答：(1)(3)(5)

解：依圖形，得知$y=f(x)=m(x+1)(x-2)^2$，其中$m>0$

(1) $f(-1)=0$　(2)應為$f\left(\dfrac{1}{3}\right)>f\left(\dfrac{2}{3}\right)$　(3) $f(x)<0$的解為$x<-1$

(4) $f(x)\ge 0$的解為$x\ge -1$，故$f(-x)\ge 0$的解為$-x\ge -1\Rightarrow x\le 1$

(5) $x\cdot f(x)==mx(x+1)(x-2)^2<0\Rightarrow x(x+1)<0$的解為$-1<x<0$。

7. 已知數列$\langle a_n\rangle$為每項皆為正數的等差數列，且公差$d\ne 0$，

數列$\langle b_n\rangle$為每項皆為正數的等比數列，且公比$r\ne 1$，請問下列哪些選項正確？

(1) $\langle 3a_n\rangle$為公差是$3d$的等差數列　(2) $\langle a_n+5\rangle$為公差是$d+5$的等差數列

(3)〈 $3b_n$ 〉為公比是 $3r$ 的等比數列　(4)〈 $(b_n)^3$ 〉為公比是 $r^3$ 的等比數列
(5)〈 $\log b_n$ 〉為公差是 $r$ 的等差數列。　【106 台北區聯合學測模擬考①】

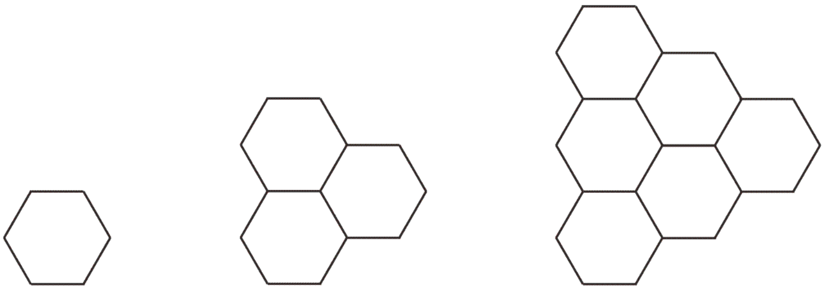
答：(1)(4)

解：(2)〈 $a_n+5$ 〉為公差是 $(a_{n+1}+5)-(a_n+5)=d$ 的等差數列

(3)〈 $3b_n$ 〉為公比是 $\dfrac{3b_{n+1}}{3b_n}=r$ 的等比數列

(5)〈 $\log b_n$ 〉為公差是 $\log b_{n+1}-\log b_n=\log\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\log r$ 的等差數列

8. 觀察下列各圖形，
第(一)圖為 6 根邊長為 1 的磁條圍成的正六邊形，
第(二)圖用了 15 根邊長為 1 的磁條圍成 3 個邊長為 1 的正六邊形，
第(三)圖用了 27 根邊長為 1 的磁條圍成 6 個邊長為 1 的正六邊形。
依此規則增加，請問下列哪些選項正確？



第(一)圖　第(二)圖　第(三)圖

(1)第(四)圖有 10 個邊長為 1 的正六邊形　(2)第(四)圖用了 45 根邊長為 1 的磁條
(3)第(五)圖有 15 個邊長為 1 的正六邊形　(4)第(五)圖用了 64 根邊長為 1 的磁條
(5)從第(一)圖到第(十)圖共有 220 個邊長為 1 的正六邊形。　【106 台北區聯合學測模擬考①】

答：(1)(3)(5)

解：遞迴式：$\begin{cases}\text{正六邊形個數：}a_{n+1}=a_n+(n+1)\\ \text{磁條數：}b_{n+1}=b_n+2+(n+2)+2(n+1)\Rightarrow b_{n+1}=b_n+3(n+2)\end{cases}$

一般項：$\begin{cases}\text{正六邊形個數：}a_n=a_1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}\\ \text{磁條數：}b_n=b_1+3(3+4+\cdots+(n+1))=\dfrac{3n(n+3)}{2}\end{cases}$

$a_4=10,b_4=42,a_5=15,b_5=60,\displaystyle\sum_{i=1}^{10}a_i=\frac{1}{2}\times\frac{10\times11\times12}{3}=220$

9. 設三次多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，請問下列哪些選項正確？
(1)若 $a$、$b$、$c$、$d$ 為實數，$i=\sqrt{-1}$，且 $f(1+i)=3$，則 $f(1-i)=-3$
(2)若 $a$、$b$、$c$、$d$ 為有理數，且 $f\left(1+\sqrt[3]{2}\right)=0$，則 $f\left(1-\sqrt[3]{2}\right)=0$
(3)若 $a$、$b$、$c$、$d$ 為整數，且 $2x+4$ 為 $f(x)$ 之因式，則 $2\mid a$ 且 $4\mid d$
(4)若 $a$、$b$、$c$、$d$ 為正整數，則方程式 $f(x)=0$ 至少有一負實數根
(5)若 $f(x)=0$ 有三相異正實數根，則方程式 $f\left(x^3\right)=0$ 亦有三相異正實數根。

【106 台北區聯合學測模擬考①】

答：(4)(5)

解：(1)若 $a$、$b$、$c$、$d$ 為實數，$i=\sqrt{-1}$，且 $f(1+i)=3+0i$，則 $f(1-i)=3-0i$

(2)若 $a$、$b$、$c$、$d$ 為有理數，且 $f\left(1+\sqrt{2}\right)=0$，則 $f\left(1-\sqrt{2}\right)=0$

(3)若 $a$、$b$、$c$、$d$ 為整數，且 $2(x+2)$ 為 $f(x)$ 之因式，則 $1|a$ 且 $2|d$

(4)若 $a$、$b$、$c$、$d$ 為正整數，則方程式 $f(x)=0$ 無正實根，

$\deg f(x)=3$，由成雙定理知，至少有一負實數根

(5)若 $f(x)=0$ 有三相異正實數根 $\alpha,\beta,\gamma$，

則方程式 $f\left(x^3\right)=0$ 亦有三相異正實數根 $\sqrt[3]{\alpha},\sqrt[3]{\beta},\sqrt[3]{\gamma}$

10. 請問下列哪些選項正確？

(1) $y=2^x$ 的函數圖形與 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 的函數圖形對稱於 $y$ 軸

(2)當 $x>0$ 時，$10^x>x^2$ 恆成立

(3)設 $0<x_1<x_2$，則 $\dfrac{\log x_1+\log x_2}{2}>\log\dfrac{x_1+x_2}{2}$

(4)方程式 $x+\log x=0$ 恰有一實根

(5)方程式 $2^x=\left|\log_2 x\right|$ 恰有一實根。 【106 台北區聯合學測模擬考①】

答：(1)(2)(4)(5)

解：(1) $y=2^x$ 的函數圖形與 $y=2^{-x}$ 的函數圖形對稱於 $y$ 軸

(2)當 $x>0$ 時，$y=10^x$ 恆在 $y=x^2$ 上方

(3) $y=\log x$ 圖形凹口向下，則 $\dfrac{\log x_1+\log x_2}{2}<\log\dfrac{x_1+x_2}{2}$

(4) $\begin{cases} y=-x \\ y=\log x \end{cases}$，恰有一交點　　(5) $\begin{cases} y=2^x \\ y=\left|\log_2 x\right| \end{cases}$，恰有一交點

11. 坐標平面上以原點為中心，半徑為1的圓上有一個內接正六邊形，

已知 $P_1(1,0)$ 為其中一個頂點，順時針方向頂點依序為 $P_2$、$P_3$、$P_4$、$P_5$、$P_6$。

今在 $P_1$ 上放置一個棋子，並擲一顆公正的骰子若干次，

若每次點數出現 $k$ 點，則棋子就依順時針方向往相鄰頂點跳動 $k$ 步，

例如：第一次擲出2點，則棋子將從 $P_1$ 移動到 $P_3$；

第二次擲出5點，則棋子接著從 $P_3$ 移動到 $P_2$，……，依此類推，

請問下列哪些選項正確？

(1)棋子從 $P_1$ 開始，擲兩次骰子，則最後的位置在 $P_1$ 的機率為 $\dfrac{1}{6}$

(2)棋子從 $P_1$ 開始，擲兩次骰子，則最後的位置在 $P_2$ 的機率為 $\dfrac{1}{6}$

(3)棋子從 $P_1$ 開始，擲三次骰子，則最後的位置在 $P_1$ 的機率為 $\dfrac{1}{36}$

(4)棋子從 $P_1$ 開始，擲 $n$ 次骰子（$n\ge 2$），令最後的位置在 $P_1$ 的機率為 $a_n$，

則$a_{n+1}=\frac{1}{6}a_n$

(5)棋子從$P_1$開始，擲六次骰子，則最後的位置在$P_1$的機率為$\frac{1}{6}$。

【106台北區聯合學測模擬考①】

答：(1)(2)(5)

解：(1)兩次點數和為6或12的機率為$\frac{5+1}{6^2}=\frac{1}{6}$

(2)兩次點數和為7的機率為$\frac{6}{6^2}=\frac{1}{6}$

(3)三次點數和為6或12或18的機率為$\frac{(3+6+1)+(6+6+3+3+6+1)+(1)}{6^3}=\frac{1}{6}$

(1)(3)(4)(5)遞迴式$a_{n+1}=\frac{1}{6}a_n+\frac{1}{6}(1-a_n)=\frac{1}{6}$

12. 孝順的阿文想在父親節時幫老爸的手機換新的資費，他將原方案與新方案第一年每月月租費做了比較，如下表所示，試問下列敘述哪些是正確的？

| 方案 | 第1個月 | 第2個月 | 第3個月 | 第4個月 | 第5個月 | 第6個月 | 第7個月 | 第8個月 | 第9個月 | 第10個月 | 第11個月 | 第12個月 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 原方案 | 239 | 269 | 279 | 289 | 289 | 289 | 339 | 339 | 359 | 359 | 389 | 389 |
| 新方案 | 219 | 239 | 259 | 279 | 289 | 299 | 309 | 309 | 339 | 369 | 399 | 399 |

（單位：元）

(1)僅考慮第一年所花費的金額，新方案的費用較原方案划算
(2)新方案之標準差小於原方案之標準差
(3)新方案之標準差大於原方案之標準差
(4)在原方案中，中位數＞平均數＞眾數
(5)在原方案中，中位數＞平均數＝眾數。

【106台北區聯合學測模擬考①】

答：(1)(3)

解：先將原數據做適當平移與伸縮，得出：

| | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 | 十一 | 十二 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_{原}=\frac{x_{原}-309}{10}$ | $-7$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-2$ | $-2$ | 3 | 3 | 5 | 5 | 8 | 8 |
| $Y_{新}=\frac{x_{新}-309}{10}$ | $-9$ | $-7$ | $-5$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 0 | 3 | 6 | 9 | 9 |

$\overline{Y_{原}}=1>\overline{Y_{新}}=0$，$\overline{X_{原}}=319>\overline{X_{新}}=309$，故(1)新方案的費用較原方案划算

$S_{Y原}=\sqrt{\frac{282}{12}-1^2}=\sqrt{\frac{45}{2}}<S_{Y新}=\sqrt{\frac{376}{12}-0^2}=\sqrt{\frac{94}{3}}$

$S_{X原}=10\sqrt{\frac{45}{2}}<S_{X新}=10\sqrt{\frac{94}{3}}$，故(2)(3)新方案之標準差大於原方案之標準差

(4)(5)在原方案中，平均數$319>$中位數$289=$眾數$289$

**第貳部分：選填題**

A. 多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 $2$，除以 $x+2$ 的餘式為 $5$，假設 $(x+1)f(x)$ 除以 $(x-1)(x+2)$ 的餘式為 $ax+b$，則數對 $(a,b)=$______。【106 台北區聯合學測模擬考①】

答：$(3,1)$

解：$\begin{cases} f(x)=(x-1)Q_1(x)+2 \\ f(x)=(x+2)Q_2(x)+5 \\ (x+1)f(x)=(x-1)(x+2)Q_3(x)+ax+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1)=2, f(-2)=5 \\ 2f(1)=a+b \\ -f(-2)=-2a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}$

B. 據報導某實驗室發現一種新細菌，此種細菌每經過一天後，細菌的數量會增加為原來的 $r$ 倍，已知從一開始經過 $3$ 天後細菌數為 $4000$ 個，接著再經過 $3$ 天後細菌數為 $256000$ 個，若以這樣的速度繁殖，則從一開始經過______天後，細菌個數開始超過 $10^8$ 個。
【106 台北區聯合學測模擬考①】

答：11

解：$\begin{cases} 4000=A\times r^3 \\ 256000=A\times r^6 \\ 10^8=A\times r^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=4 \\ A=62.5 \end{cases} \xrightarrow{10^5=4^{n-2} \Rightarrow \log 10^5=(n-2)\log 4} n=10.3\cdots$

C. 已知 $a\geq b>1$，求 $\log_b\left(\dfrac{b^5}{a}\right)+\log_a\left(\dfrac{a^4}{b}\right)$ 的最大值為______。
【106 台北區聯合學測模擬考①】

答：7

解：$\dfrac{\log_b a+\log_a b}{2}\geq\sqrt{\log_b a\times\log_a b} \Rightarrow \log_b a+\log_a b\geq 2 \Rightarrow -(\log_b a+\log_a b)\leq -2$

故原式 $=5-\log_b a+4-\log_a b=-(\log_b a+\log_a b)+9\leq -2+9=7$

D. 甲、乙、丙、丁、戊五人參加歌唱比賽，評審團三位評審在賽後講評時透露了以下訊息：
評審 $A$：「甲不是最差的。」
評審 $B$：「乙唱得比丙來的好些。」
評審 $C$：「冠軍不是乙、丁。」
試求在沒有名次相同，且符合評審講評的條件下，有______種不同名次的排列情況。
【106 台北區聯合學測模擬考①】

答：21

解：依題意，乙、丙、丁不是冠軍，冠軍只可能為甲、戊

若甲為冠軍：乙、丙、丁、戊排列，且乙在丙之前（亦即次序不變），$\dfrac{4!}{2!}=12$ 種

若戊為冠軍：甲、乙、丙、丁排列，且乙在丙之前，甲不排末位，$\dfrac{4!}{2!}-\dfrac{3!}{2!}=9$ 種

E. 估算$(0.98)^{10}$的近似值到小數點後第三位________。（四捨五入取到小數點後第三位）

【106 台北區聯合學測模擬考①】

答：0.817

解：$(1-0.02)^{10}=C^{10}_0+C^{10}_1(-0.02)+C^{10}_2(-0.02)^2+C^{10}_3(-0.02)^3+\cdots$

$\approx 1-0.2+0.018-0.00096+\cdots\approx 0.81704\cdots$

F. 袋子裡共有15顆球，其中有②、④、⑥、⑧、⑩五種號碼，每一種號碼各有三顆球。假設每一顆球被拿到的機率相等，今從袋中取出三顆球，已知此三顆球的號碼和為12，求此三顆球的號碼都是④的機率為________。（化為最簡分數）

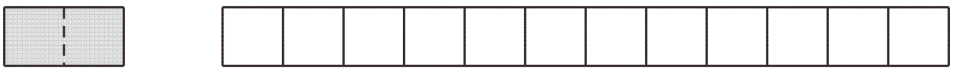
【106 台北區聯合學測模擬考①】

答：$\dfrac{1}{37}$

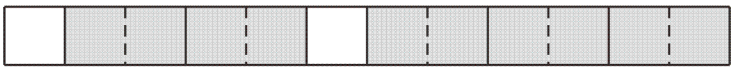
解：$$\frac{\overbrace{(4,4,4)}^{C^3_3}}{\underbrace{C^3_1C^3_2}_{(8,2,2)}+\underbrace{C^3_1C^3_1C^3_1}_{(6,4,2)}+\underbrace{C^3_3}_{(4,4,4)}}=\frac{1}{9+27+1}=\frac{1}{37}$$

G. 翔翔手上有許多塊規格為$1\times 2$的長方形積木，想要拼裝在一個規格為$1\times 12$的底板上。

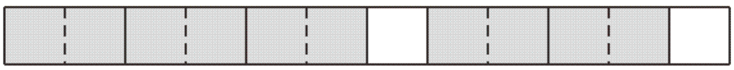
積木　　　　底板



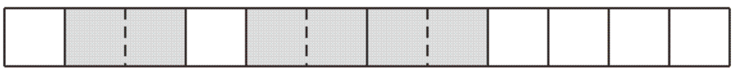
若規定積木只能拼在底板上（不能疊高），不能超出底板範圍，積木與積木之間可緊鄰或恰間隔一個空位。翔翔將每一塊積木放置後，便不再移動位置，直到無法再放置任何積木為止。例如圖(一)、圖(二)為其中2種可能的積木擺放方式；而圖(三)因尚有空位能放置積木，故為不合之情況。



圖(一)



圖(二)



圖(三)

則翔翔共有________種不同的排列方法。（註：無須考慮旋轉、翻轉的情形）

【106 台北區聯合學測模擬考①】

答：21

解：使用 6 塊積木，方法數 1

使用 5 塊積木，有 2 個不相鄰空格（插空隙），方法數$C^6_2=15$

使用 4 塊積木，有 4 個不相鄰空格（插空隙），方法數$C^5_4=5$

H. 臺灣地震頻繁，發生地震等意外時，在大樓林立的都會區，其樓層疏散路線及相關措施相當重要。今有一高樓，調查其中某些樓層 $x$（單位：樓）與該樓層的逃生時間 $y$（單位：秒）之相關統計數據整理如下：

$\sum_{i=1}^{8} x_i = 80$，$\sum_{i=1}^{8} y_i = 2400$，$x$ 的標準差 $\sigma_x = 6$，$y$ 的標準差 $\sigma_y = 120$，

$x$、$y$ 的相關係數 $r = 0.9$

由整理數據可推估，平均每增加一樓層，其逃生時間平均會增加________秒。

【106 台北區聯合學測模擬考①】

$\boxed{答}$：18

$\boxed{解}$：迴歸直線斜率 $m = r \times \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x} \Rightarrow m = \dfrac{9}{10} \times \dfrac{120}{6} = 18$