

臺中女中 105 學年度學科能力測驗模擬試題數學科



RA268

第壹部分：選擇題（佔 60 分）

一、單選題（佔 30 分）

說明：第 1 至 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 兩位運動員同時繞著 400 公尺的跑道進行 10000 公尺賽跑，他們在同一時間從同一地點朝相同方向開始跑。已知甲選手每 60 秒跑完一圈，乙選手每 68 秒跑完一圈。請問甲選手在其跑第幾圈時會第一次超越乙選手？

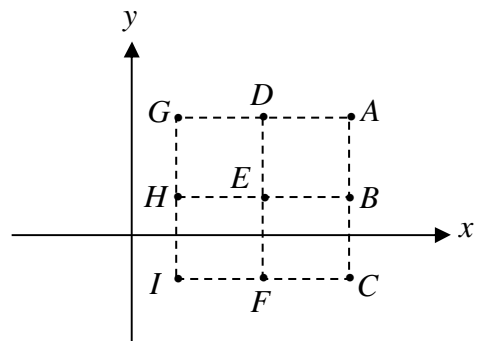
(1)6 (2)7 (3)8 (4)9 (5)10

2. 設 m 為 $(\frac{1}{4})^{-0.25}$ 的小數部份，則 $\sqrt{m^3 + \frac{1}{m^3}} + 27$ 最接近下列哪一個整數？

(1)4 (2)5 (3)6 (4)7 (5)8

3. 如右圖，在座標平面上有一個各小方格都是正方形且各邊平行座標軸的「田」字。如果將 9 個頂點 A 、 B 、 C 、.....、 I 的座標 (x, y) 代入方程式 $k = 2016x - 1008y$ 會得到幾個不同的 k 值？

(1)4 (2)5 (3)6 (4)7 (5)8



4. 下列各方程式或不等式中，整數解的個數何者最少？

(1) $|3x+1| < 4$ (2) $7 \leq |3x-5| < 10$ (3) $|x+1| + |x-7| = 8$
 (4) $2|x+2| - |x-2| < 7$ (5) $|x| + |x-5| = 2$

5. 設 $\alpha \neq \beta$ ，且兩數分別滿足 $\alpha^2 - 2 = 5\alpha$ ， $\beta(5-\beta) + 2 = 0$ ，則 $\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{-5\alpha}{2-\beta^2}}\right)^2 = ?$

(1) $-\frac{33}{2}$ (2) $-\frac{25}{2}$ (3) $\frac{33}{2}$ (4) $\frac{25}{2}$ (5) 需考慮 α, β 的大小關係，無法確定

6. 設 $x > 0$ ， $y > 0$ ， $\left(\frac{x}{\sqrt{y}} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right)^8$ 的展開式中， $\sqrt{x^7}\sqrt{y}$ 的係數為

(1)-56 (2)-70 (3)56 (4)70 (5)0

二、多選題（佔 30 分）

說明：第 7 至 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 請選出正確的選項。

- (1) $(0.2)^{0.3} > (0.3)^{0.3}$ (2) $\log_{0.96} 0.98 > \log_{0.99} 1.01$ (3) $3^{0.2} > \log_5 4$
(4) $3^{\log_9 4} > 10^{0.3}$ (5) $\log 14.99 + \log 15.01 > 2 \log 15$

8. 已知 $f(x) = \frac{-2}{3} \cdot \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} + 2 \cdot \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} - \frac{2}{3} \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)}$ ，請選出正確的選項。

- (1) $f(x)$ 的最大值為 $\frac{7}{3}$ (2) $f(x)$ 除以 $x-3$ 的餘式為 2
(3) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式為 $8x-10$ (4) 方程式 $f(x)=0$ 在區間 $(1,4)$ 沒有實根
(5) 滿足不等式 $f(x)>0$ 的整數解恰有 1 個

9. 設 n 為正整數，二數列 $a_n = 2^n$ ， $b_n = n$ ，且 S_n 、 T_n 分別表示數列 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ 前 n 項的和，若數列 $c_n = \begin{cases} a_1 b_1, n=1 \\ S_n T_n - S_{n-1} T_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$ ，請選出正確的選項。

- (1) $c_3 = 66$ (2) 對於所有正整數 n ，恆有 $c_n \geq a_n \geq b_n$ (3) 滿足 S_n 為 10 位數的正整數 n 有 3 個
(4) $\frac{T_n}{(n+2)T_{n+1}}$ 的最大值為 $\frac{1}{6}$ (5) $\sum_{n=1}^{10} c_n > 10^5$

10. 由一副撲克牌(有黑桃、紅心、方塊與梅花四種花色，每種花色有 13 張，共 52 張)中隨機抽出一張牌，取後不放回，連取三次，假設每一張牌被抽中的機率均等，令 A 代表第一次抽出的牌點數為 10 的事件， B 代表第三次抽出的牌點數為 10 的事件， C 代表三次中有恰兩次抽出的牌點數為 10 的事件，請選出正確的選項。

- (1) $P(B) = \frac{1}{13}$ (2) $P(A) = P(B)$ (3) $P(A|B) = \frac{1}{17}$
(4) $P(B|C) = \frac{2}{221}$ (5) A 和 B 為獨立事件

11. 小玟因工作業務需求，想要得知上週五升旗時間 7 點 40 分的溫度，於是到氣象局網站查詢資料，但氣象局資料只提供了如右表資訊：小玟決定以多項式函數 $y = f(x)$ 來描述

時間 x (時)	7	7.5	8
溫度 y ($^{\circ}\text{C}$)	32	33	34

這筆資料，並依此函數推測當日 7 點 40 分 (即 $x = \frac{23}{3}$) 的溫度，請選出正確的選項。

- (1) 滿足這 3 筆資料的多項式函數 $y = f(x)$ 有無限多個，其次數有可能是二次
(2) 為便於計算，小玟企圖尋求所有滿足此資料的多項式函數 $y = f(x)$ 中次數最低者，
設此最低次的多項式為 $g(x)$ ，則 $g(x)$ 必為 $2x+18$

(3)承(2)，如以拉格朗日(Lagrange)插值法求得滿足此筆資料的多項式函數為 $y = h(x)$ ，

且 $h(x)$ 的次數不到三次，則 $h\left(\frac{23}{3}\right) = 33.\bar{3}$

(4)設 $r(x)$ 為 $f(x)$ 除以 $(x-7)(x-7.5)(x-8)$ 的餘式，則 $r(x)$ 亦為滿足此資料的多項式函數，其次數是二次。

(5)承以上選項， $g(x) = h(x) = r(x)$ 恆成立

12.設 $x \geq 3$ ，欲求函數 $y = 4 + 2\log_3 x + \log_x 3$ 的最小值，以下敘述何者正確？

(1)若設 $t = \log_3 x$ ，則 t 必為正數，且 $y = 4 + 2t + \frac{1}{t}$

(2)承(1)，由算幾不等式可知： $4 + 2t + \frac{1}{t} \geq 4 + 2\sqrt{2t \cdot \frac{1}{t}} = 4 + 2\sqrt{2}$

(3) y 的最小值為 $4 + 2\sqrt{2}$ 。(4)設 $f(t) = 4 + 2t + \frac{1}{t}$ ，當 $t_1 > t_2 \geq 1$ 時， $f(t_1) > f(t_2)$ 恆成立。

(5)承(4)， y 的最小值為 $f(1) = 7$ 。

第貳部分：選填題（佔 40 分）

說明：1.第 A 至 H 題，將答案劃記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(13-40)。

2.每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 某人在 13 年前於 SGCT 銀行存入了 200 萬元，而此家銀行過去 13 年來利息計算方式與利率曾作過一次調整：最初 10 年為單利計息，年利率 5%；後 3 年為複利計息，年利率 2%，13 年來皆為每年計息一次，則 13 年期滿時此人存款的本利和為 _____ 元。

B. 已知 $f(x) = x^5 - kx^4 + (4k - 12)x^3 - 15x^2 - 2x + k$

$$= a(x-3)^5 + b(x-3)^4 + c(x-3)^3 + d(x-3)^2 + e(x-3) + f,$$

若 $a + b + c + d + e + f = 16$ ，則 $f(x)$ 除以 $(x-3)^2$ 的餘式為 _____。

C. 已知 a 為實數，若方程式 $x^2 + a|x| + a^2 - 144 = 0$ 恰有一個實數解 x ，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

D. 試觀察下列三數列，

$$\langle a_i \rangle = \langle 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots \rangle, \langle b_i \rangle = \langle 4, 12, 24, 40, 60, 84, \dots \rangle, \langle c_i \rangle = \langle 5, 13, 25, 41, 61, 85, \dots \rangle$$

設以 a_i ， b_i ， c_i 為三邊的三角形面積為 d_i ，試求 $\sum_{i=1}^{10} d_i =$ _____。

E. 設 $f(x)$ 為滿足 $f(1+i) = f(2) = 0$ 之最低次實係數多項式，且 $f(x)$ 的最高次項係數為正， $g(x)$ 為滿足 $g(k) = k, k = 1, 2, 3$ ，且 $g(4) = 16$ 之最低次實係數多項式，則滿足不等式 $\frac{f(x)}{g(x)-x} \leq 0$ 的整數解個數有 _____ 個。

F. 設三次方程式 $x^3 - 24x^2 + cx + d = 0$ 的三個根為 α, β, γ ，其中 α, β 是正奇數，且 $d < 0$ ，則數對 (α, β, γ) 共有 _____ 種不同的可能。

G. 某次數學段考共有 10 題是非題，小玗 考前因病請了長假而沒跟上進度，10 題都不會。段考結束後，決定先請教班上數學成績最優的兩位同學甲和乙。小玗 只知道這次的是非題中，共有 4 題答案是「圈」，6 題答案是「叉」，而根據過往經驗統計，甲生的答對率為 $\frac{9}{10}$ ，乙生的答對率為 $\frac{8}{9}$ ，兩人作答彼此獨立。今小玗 隨機選擇其中一題問甲、乙二生，在甲生回答「圈」，乙生卻認為是「叉」的狀況下，則此題答案是「圈」的機率為 _____。

H. 設 $(\log y)^2 + (2^{1+x} + 2^{1-x}) \log y + (2^{1+2x} + 2^{1-2x}) = 0$ ，求 $x + y =$ _____。
(請化為最簡分數)

RA268 (臺中女中 105 學年度學科能力測驗模擬試題)

選擇題：1. (4) 2. (3) 3. (4) 4. (5) 5. (1) 6. (1) 7. (2)(3)(4) 8. (1)(2) 9. (1)(2)(5)
10. (1)(2)(3) 11. (2)(3)(5) 12. (1)(2)(4)(5)

選填題：A. 3183624 B. $-11x+35$ C. 12 D. 7260 E. 0 F. 66 G. $\frac{3}{7}$ H. $\frac{1}{100}$