

RA268 105 台中女中複習考數學考科詳解

一、單選題

1.(4)

[解] 設 t 秒相遇

$$\Rightarrow \frac{400t}{60} - \frac{400t}{68} = 400k, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{60} - \frac{t}{68} = k \Rightarrow t = 510k$$

當 $k=1$ 時，甲選手跑了 510 秒 $\Rightarrow \frac{510}{60} = 8.5$ (圈)，故在第 9 圈時超越

2.(3)

$$[\text{解}] \because \left(\frac{1}{4}\right)^{-0.25} = \sqrt{2} \Rightarrow m = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow m + \frac{1}{m} = \sqrt{2} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 2\sqrt{2}$$

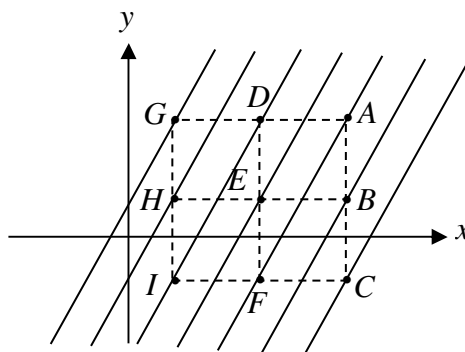
$$\Rightarrow \sqrt{m^3 + \frac{1}{m^3} + 27} = \sqrt{\left(m + \frac{1}{m}\right)\left(m^2 - 1 + \frac{1}{m^2}\right) + 27} = \sqrt{10\sqrt{2} + 27} = 5 + \sqrt{2} \approx 6.414$$

3.(4)

[解] $\because k = 2016x - 1008y$ 表斜率為 2 的直線

故通過此 9 點的直線共有 7 條

因此有 7 個不同的 k 值



4.(5)

[解] 由三角不等式可知，對於任意實數 x ，恆有 $|x| + |x-5| = |x| + |5-x| \geq |x+5-x| = 5$ ，

故 $|x| + |x-5| = 2$ 無實數解。

5.(1)

[解] 原條件可整理為 $\begin{cases} \alpha^2 - 5\alpha - 2 = 0 \\ \beta^2 - 5\beta - 2 = 0 \end{cases}$ ，表示 α, β 為方程式 $x^2 - 5x - 2 = 0$ 之兩根(為實根)。

由根與係數關係可知： $\begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ \alpha\beta = -2 \end{cases}$ ，又 α, β 為實數，故 α, β 異號，可得 $\frac{\beta}{\alpha} < 0$ ， $\frac{\alpha}{\beta} < 0$ 。

$$\Rightarrow \left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{-5\alpha}{2-\beta^2}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{-5\alpha}{-5\beta}}\right)^2 = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} - 2 = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} - 2 = -\frac{33}{2}。$$

6.(1)

[解]一般項為 $C_k^8 \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^{8-k} \cdot \left(-\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^k = C_k^8 \cdot (-1)^k \cdot x^{8-\frac{3}{2}k} \cdot y^{\frac{3}{2}k-4} \Rightarrow k=3$ ，故係數為 $C_3^8 \cdot (-1)^3 = -56$

二、多選題

7.(2)(3)(4)

[解] (1)錯誤： $0.3 > 0.2 \Rightarrow (0.3)^{0.3} > (0.2)^{0.3}$ 。

(2)正確： $\log_{0.96} 0.98 > 0$ ， $\log_{0.99} 1.01 < 0$ ，故 $\log_{0.96} 0.98 > \log_{0.99} 1.01$

(3)正確： $3^{0.2} > 1$ ， $\log_5 4 < 1$ ，故 $3^{0.2} > \log_5 4$

(4)正確： $3^{\log_9 4} = 3^{\log_3 2} = 2$ ，故比較 2 與 $10^{0.3}$ (取 $\log$)， $\log 2 = 0.301$ ， $\log 10^{0.3} = 0.3$ ，故 $2 > 10^{0.3}$ 。

(5)錯誤： $\frac{\log 14.99 + \log 15.01}{2} = \log \sqrt{14.99 \times 15.01} < \log \frac{14.99 + 15.01}{2} = \log 15$

8.(1)(2)

[解]依題意： $f(1) = -\frac{2}{3}$ ， $f(2) = 2$ ， $f(4) = -\frac{2}{3}$ ，且 $\deg f(x) = 2$

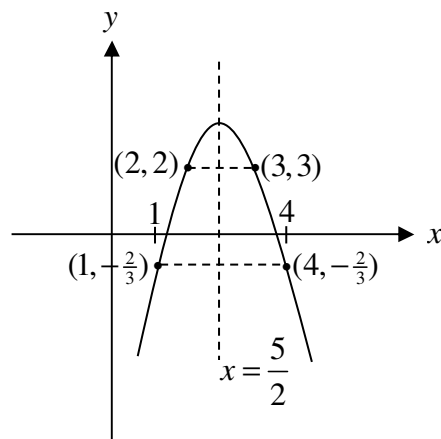
(1)正確：如圖： $\because f(1) = f(4) \Rightarrow$ 對稱軸為 $x = \frac{5}{2}$

$$\text{令 } f(x) = a(x-1)(x-4) - \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 2 = a(2-1)(2-4) - \frac{2}{3} \Rightarrow a = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{4}{3}(x-1)(x-4) - \frac{2}{3}$$

$$\text{故最大值 } f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$



(2)正確：由對稱性知： $f(3) = 2$

(3)錯誤：設 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式為 $ax+b$ ，由 $f(1) = a+b = -\frac{2}{3}$ ， $f(2) = 2a+b = 2$

$$\text{得 } a = \frac{8}{3}, b = -\frac{10}{3} \Rightarrow \text{餘式為 } \frac{8}{3}x - \frac{10}{3}$$

(4)錯誤： $\because f(2) = f(3) = 2 \Rightarrow f(1)f(2) < 0$ ， $f(3)f(4) < 0 \Rightarrow \alpha \in (1, 2)$ ， $\beta \in (3, 4)$
 $\Rightarrow f(x) = 0$ 的兩根 α 、 $\beta \in$ 區間 $(1, 4)$

(5)錯誤：由圖可知： $f(x) > 0$ 的解為 $\alpha < x < \beta$ ($\alpha < \beta$) 且 $\alpha \in (1, 2)$ ， $\beta \in (3, 4)$

故其整數解有 $x = 2, 3$ 共 2 個

9.(1)(2)(5)

[解](1)正確： $c_3 = S_3T_3 - S_2T_2 = 14 \times 6 - 6 \times 3 = 66$

(2)正確： $1^\circ) n=1 : a_1 = 2, b_1 = 1, c_1 = 2 \Rightarrow c_1 \geq a_1 \geq b_1$

$2^\circ) n \geq 2 : \text{易知 } a_n = 2^n > n = b_n$

$$c_n = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} \cdot \frac{(n-1)n}{2} = 2n[2^{n-2}(n+3) - 1] > 2n(2^{n-1}) > 2^n$$

故 $c_n \geq a_n \geq b_n$

(3)錯誤： $\because S_n = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2 \approx 2^{n+1}$ 為 10 位數 $\Rightarrow 9 \leq \log 2^{n+1} < 10 \Rightarrow 9 \leq (n+1) \log 2 < 10$

$$\Rightarrow \frac{9}{0.301} \leq (n+1) < \frac{10}{0.301} \Rightarrow 29.9 \dots \leq n+1 < 33.2 \dots$$

$$\Rightarrow 28.9 \dots \leq n < 32.2 \dots \Rightarrow n = 29, 30, 31, 32 \text{ 共 4 個}$$

$$(4) \text{錯誤} : \frac{T_n}{(n+2)T_{n+1}} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{(n+2) \frac{(n+1)(n+2)}{2}} = \frac{n}{n^2 + 4n + 4} = \frac{1}{n + \frac{4}{n} + 4} \leq \frac{1}{2\sqrt{4} + 4} = \frac{1}{8}$$

(5)正確： $c_1 = a_1b_1$

$$c_2 = S_2T_2 - a_1b_1$$

$$c_3 = S_3T_3 - S_2T_2$$

$\vdots$

$$+) c_{10} = S_{10}T_{10} - S_9T_9$$

$$\text{累加} : \sum_{n=1}^{10} c_n = S_{10}T_{10} = \frac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1} \cdot \frac{10(11)}{2} = 110(2^{10} - 1) > 100(2^{10} - 1) > 100(10^3) = 10^5$$

10.(1)(2)(3)

[解](1)正確： $P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(2)正確： $P(A) = P(B) = \frac{1}{13}$

$$(3) \text{正確} : P(A \cap B) = \frac{C_2^4 \cdot 2! \cdot 50}{C_3^{52} \cdot 3!} = \frac{1}{221} \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{221}}{\frac{1}{13}} = \frac{1}{17}$$

$$(4) \text{錯誤} : P(C) = \frac{C_2^4 \cdot 2! \cdot 48}{C_3^{52} \cdot 3!} \times 3, P(B \cap C) = \frac{C_2^4 \cdot 2! \cdot 48}{C_3^{52} \cdot 3!} \times 2 \Rightarrow P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{2}{3}$$

(5)錯誤： $P(A) = P(B) = \frac{1}{13}, P(A \cap B) = \frac{1}{221} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ 所以不獨立

11. (2)(3)(5)

[解](1)錯誤：表中的三個資料點皆落在直線 $g'(x) = 2x + 18$ 上，故對於任意多項式 $q(x)$ ，多項式 $f(x) = (x-7)(x-7.5)(x-8)q(x) + g'(x)$ 恆過此三點，故有無限多個。

$$\text{設 } y = f'(x) \text{ 為滿足此筆資料的二次多項式，則恆有 } \begin{cases} f'(7) = 32 = g'(7) \\ f'(7.5) = 33 = g'(7.5) \\ f'(8) = 34 = g'(8) \end{cases}$$

又 $f'(x)$ 與 $g'(x)$ 的次數皆不超過二次，故得 $f'(x) = g'(x) = 2x + 18$ ，與假設矛盾！故 $f(x)$ 的次數不可能為二次。

(2)正確：設 $g(x)$ 為滿足此筆資料的最低次多項式，又 $g'(x) = 2x + 18$ 亦滿足此筆資料，故 $g(x)$ 的次數不超過一次。如(1)之說明，任何滿足此筆資料且次數不超過二次的多項式必唯一存在，故得 $g(x) = g'(x) = 2x + 18$ 。

(3)正確： $h(x)$ 滿足此筆資料且次數不超過二次，故 $h(x) = 2x + 18$ ，可得 $h\left(\frac{23}{3}\right) = 33.\bar{3}$ 。

$$(4) \text{錯誤：依題意， } f(x) = (x-7)(x-7.5)(x-8)q(x) + r(x)，\text{ 可得 } \begin{cases} r(7) = f(7) = 32 \\ r(7.5) = f(7.5) = 33 \\ r(8) = f(8) = 34 \end{cases}$$

$r(x)$ 亦滿足此筆資料且次數不超過二次，故 $r(x) = 2x + 18$ 。

(5)正確：承以上說明， $g(x) = h(x) = r(x) = 2x + 18$ 。

12. (1)(2)(4)(5)

[解](1)正確： $x \geq 3$ 時， $t = \log_3 x \geq \log_3 3 = 1$ ，必為正數；又 $\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{t}$ 。

(2)正確： $2t$ 與 $\frac{1}{t}$ 皆為正數，可由算幾不等式得 $4 + 2t + \frac{1}{t} \geq 4 + 2\sqrt{2t \cdot \frac{1}{t}} = 4 + 2\sqrt{2}$ 。

(3)錯誤：承(2)，其等號成立時機為 $2t = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

因為 $t \geq 1$ ，故等號不可能成立，即最小值不為 $4 + 2\sqrt{2}$ 。

(4)正確： $f(t_1) - f(t_2) = 2(t_1 - t_2) + \frac{t_2 - t_1}{t_1 t_2} = (t_1 - t_2) \left(2 - \frac{1}{t_1 t_2} \right) > 0$

(5)正確：由(4)， $f(t) = 4 + 2t + \frac{1}{t}$ 在 $t \geq 1$ 時為嚴格遞增，故當 $t = 1$ (即 $x = 3$) 時，有最小值 7。

選填題

A. 3183624

[解] $2 \times 10^6 \times (1 + 10 \times 0.05) \times (1 + 0.02)^3 = 3183624$

B. $-11x+35$

[解] $a+b+c+d+e+f=16 \Rightarrow f(4)=16$

1	$-k$	$4k-12$	-15	-2	k	4
	4	$-4k+16$	16	4	8	
1	$-k+4$	4	1	2	$k+8$	3
1	-8	20	-15	-2	8	3
	3	-15	15	0	-6	
1	-5	5	0	-2	2	
	3	-6	-3	-9		
1	-2	-1	-3	-11		

故 $f(x)$ 除以 $(x-3)^2$ 的餘式 $e(x-3)+f=-11(x-3)+2=-11x+35$ 。

C. 12

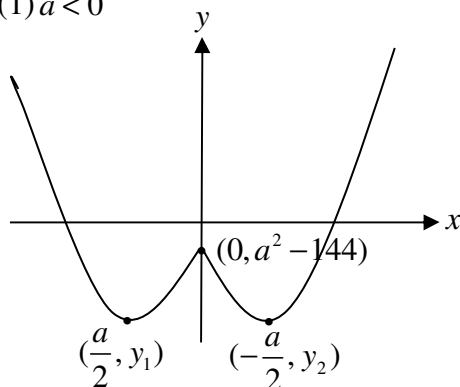
[解] 令 $y = x^2 + a|x| + a^2 - 144$

$$1^\circ) \text{ 若 } x \geq 0 \Rightarrow y = x^2 + ax + a^2 - 144 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + a^2 - 144 - \frac{a^2}{4}$$

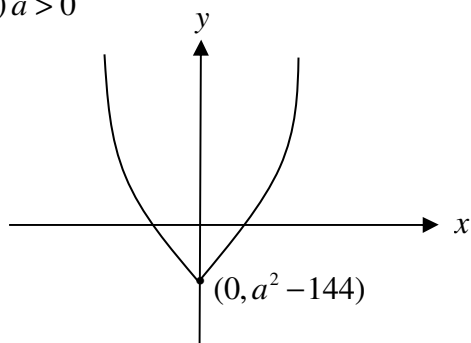
$$2^\circ) \text{ 若 } x < 0 \Rightarrow y = x^2 - ax + a^2 - 144 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + a^2 - 144 - \frac{a^2}{4}$$

再依 a 的正負討論的到下列兩種圖形： $(a=0$ 不合)

(1) $a < 0$



(2) $a > 0$



由上圖可知：左圖不可能恰一個解，故不合。

而右圖要恰一個解 $\Rightarrow a^2 - 144 = 0 \Rightarrow a = \pm 12$ (取正)

[另解] $\because y = x^2 + a|x| + a^2 - 144$ 是偶函數，圖形對稱 y 軸，故恰有 $x=0$ 一解

$$\Rightarrow \text{常數項 } a^2 - 144 = 0 \Rightarrow a = \pm 12$$

$$\text{當 } a = -12 : |x|^2 - 12|x| = 0 \Rightarrow |x| = 0 \vee 12 \Rightarrow x = 0 \vee \pm 12 \text{ (不合)}$$

D. 7260

[解] $\langle a_n \rangle = \langle 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots \rangle \Rightarrow a_i = 3 + (i-1) \cdot 2 = 2i + 1$

$$\langle b_n \rangle = 4 \langle 1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots \rangle \Rightarrow b_i = 4(1 + (2 + 3 + 4 + \dots + i)) = 4 \times \frac{i(i+1)}{2} = 2i^2 + 2i$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{10} d_i = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{2} a_i b_i = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{2} (2i+1)(2i^2 + 2i) = \sum_{i=1}^{10} 2i^3 + 2i^2 + i$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{10 \times 11}{2} \right)^2 + 2 \cdot \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{10 \times 11}{2} = 7260$$

E. 0

[解] $f(x) = k(x-2)[x-(1+i)][x-(1-i)] = k(x-2)(x^2 - 2x + 2)$, $k > 0$

設 $g(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + x$, 由 $g(4) = 6a + 4 = 16 \Rightarrow a = 2$

故 $\frac{f(x)}{g(x)-x} \leq 0 \Rightarrow \frac{k(x-2)(x^2 - 2x + 2)}{2(x-1)(x-2)(x-3)} \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) \leq 0$, 但 $x \neq 1, 2, 3$

$\Rightarrow 1 < x < 3$, 但 $x \neq 2$, 故整數解個數為 0 個。

F. 66

[解] 由根與係數的關係知: $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 24 \\ \alpha\beta\gamma = -d > 0 \end{cases}$, 且 α, β 中有兩個是正奇數, 故另一根必為正偶數。

設 $\begin{cases} \alpha = 2x + 1 \\ \beta = 2y + 1 \\ \gamma = 2z + 2 \end{cases}$, 其中 x, y, z 皆為非負整數, 則 $(2x+1) + (2y+1) + (2z+2) = 24$

$\Rightarrow x + y + z = 10$ 的非負整數解組數為 $H_{10}^3 = C_{10}^{10+3-1} = 66$ 。

G. $\frac{3}{7}$

[解] 設 A_1 : 選到答案為「圈」的事件; A_2 : 選到答案為「叉」的事件。

$\{A_1, A_2\}$ 形成樣本空間的一組分割。

設 B : 甲生回答「圈」且乙生回答「叉」的事件。則所求即

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)} = \frac{\frac{4}{10} \times \left(\frac{9}{10} \times \frac{1}{9} \right)}{\frac{4}{10} \times \left(\frac{9}{10} \times \frac{1}{9} \right) + \frac{6}{10} \times \left(\frac{1}{10} \times \frac{8}{9} \right)} = \frac{3}{7}$$

$$\text{H. } \frac{1}{100}$$

$$[\text{解}] \quad (\log y)^2 + 2(2^x + 2^{-x})\log y + 2(2^{2x} + 2^{-2x}) = 0$$

$$\Rightarrow (\log y)^2 + 2(2^x + 2^{-x})\log y + (2^x + 2^{-x})^2 + (2^{2x} + 2^{-2x} - 2) = 0$$

$$\Rightarrow (\log y + 2^x + 2^{-x})^2 + (2^x - 2^{-x})^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \log y + 2^x + 2^{-x} = 0 \\ 2^x - 2^{-x} = 0 \end{cases}$$

$$\text{由 } 2^x - 2^{-x} = 0 \text{ 得 } x = 0 \quad \therefore \log y = -2 \Rightarrow y = \frac{1}{100} \quad \therefore x + y = \frac{1}{100}$$