

全國公私立高中 106 學年度第 1 學期第二次學科能力測驗



第壹部分：選擇題(占 60 分)

一、單選題(占 35 分)

- 設 k 為實數，且 α 、 β 為方程式 $x^2 - (2k-1)x + (k^2 - 3k + 1) = 0$ 的兩實根。求 $\alpha^2 + \beta^2$ 的最小值為？(1) $-\frac{3}{2}$ (2) $-\frac{5}{2}$ (3) $-\frac{3}{8}$ (4) $\frac{5}{16}$ (5) $\frac{1}{32}$
- 試比較 $a = \log_3 0.7$ ， $b = \log_{0.7} 3$ ， $c = \log_{0.7} 3^3$ ， $d = (0.7)^3$ ， $e = 3^{0.7}$ 的大小：
(1) $e > d > a > b > c$ (2) $e > d > b > c > a$ (3) $d > e > a > b > c$
(4) $d > e > b > a > c$ (5) $e > d > c > b > a$
- 表(1)為常用對數表的一部分，試利用下表求出 $(\sqrt[3]{23})^4$ 的近似值為？
(1) 66.6 (2) 24.4 (3) 81.5 (4) 65.4 (5) 15.2

表(1)

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
15	1761	1790	1815	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8232	8241	8248	8254

- 「扛拜」飲料店舉行店長跳樓大放送，每日免費贈送 100 杯飲料給前 100 的顧客。已知這 100 杯中有 50 杯紅茶、30 杯綠茶、20 杯奶茶。再從做好的紅茶跟奶茶中分別挑一半的杯數加入珍珠，綠茶則只挑其中 10 杯加入珍珠。今日小君幸運排隊拿到免費飲料，若已知小君的飲料有加珍珠，求小君的飲料是珍珠奶茶的機率為？
(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{5}{9}$ (4) $\frac{1}{10}$ (5) $\frac{2}{9}$
- 設 $a_1, a_2, \dots, a_{20}$ 均為整數，且 $\sum_{k=1}^{20} a_k = 9$ ， $\sum_{k=1}^{20} (a_k)^2 = 35$ ，又 $-1 \leq a_k \leq 2$ (其中 $1 \leq k \leq 20$)，
令 $S = \sum_{k=1}^{20} (a_k)^3$ ，則 S 的最大值為？(1) 63 (2) 57 (3) 51 (4) 47 (5) 45
- 設四次方程式 $(x^2 - 3x + p)(x^2 - 7x + q) = 0$ 有四個相異實根，其中 p, q 為實數。已知此四根恰成為一公差為 2 的等差數列，求 $p + q = ?$ (1) $\frac{37}{2}$ (2) $\frac{13}{2}$ (3) $\frac{5}{2}$ (4) $\frac{61}{2}$ (5) 10
- 設三次多項式 $f(x)$ 滿足 $f(1) = f(-1) = f(2) = 5$ 且 $f(0) = 3$ ，試求 $(x^2 + 1) \cdot f(x)$ 除以 $x - 3$ 的餘式為？(1) -30 (2) -3 (3) -1 (4) 13 (5) 130

二、多選題(占 25 分)

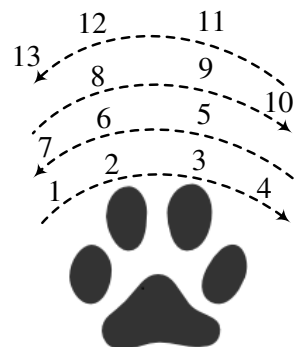
- 籤筒中有 7 支籤，其中 3 支為中獎籤，設每支籤被抽到的機率均等。現甲、乙、丙三人依序抽 1 支籤，取出的籤不再放回籤筒中。請選出正確的選項。
(1) 丙抽到中獎籤的機率是 $\frac{3}{7}$ (2) 已知甲抽到中獎籤，則丙抽到中獎籤的機率是 $\frac{3}{7}$

- (3) 甲、乙、丙均抽到中獎籤的機率是 $\frac{1}{35}$
- (4) 已知甲、乙、丙三人中恰有 1 人抽中，則是丙抽中的機率是 $\frac{18}{35}$
- (5) 已知丙抽到中獎籤，則甲、乙至少有 1 人抽到中獎籤的機率是 $\frac{3}{5}$
9. 設 $x > 0$ 且 $y > 0$ ，已知 $x + 3y = 2$ 。請選出正確的選項。
- (1) xy 之最大值為 $\frac{1}{3}$ (2) 當 $x = y$ 時， xy 有最大值 (3) $2^x + 8^y$ 之最小值為 2
- (4) 當 $(x, y) = (1, \frac{1}{3})$ 時， $2^x + 8^y$ 有最小值 (5) $\log_2 x + \log_2 3y$ 有最大值 1
10. 設多項式 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ ，其中 a, b, c 為實數。已知實數 α 為方程式 $f(x) = 0$ 的一根。請選出正確的選項。
- (1) $\alpha < 0$ (2) 若 α 為整數，則 α 必為 1 或 -1
- (3) 方程式 $f(x) = 0$ 所有的根乘積為 1
- (4) 考慮 $g(x) = f(x) + 0.0001$ ，則方程式 $g(x) = 0$ 至少有一實根
- (5) 考慮 $h(x) = x^4 + x^3$ ，則 $f(x)$ 與 $h(x)$ 的圖形在坐標平面上至少有一交點
11. 已知某班在模擬考的數學成績(X)與英文成績(Y)的平均數分別為 $\bar{x} = 50$ ， $\bar{y} = 65$ ，且其相關係數為 0.6。若在坐標平面上， Y 對 X 的迴歸直線經過點 (40, 57)，請選出正確的選項。
- (1) Y 對 X 的迴歸直線斜率為 0.6 (2) Y 的標準差大於 X 的標準差
- (3) 若該班的班長在此次模擬考數學考 50 分，則英文必定是 65 分
- (4) 若另一筆資料 Z 滿足 $Z = -2X + 30$ ，則 Z 與 Y 的相關係數仍為 0.6
- (5) 承(4)， Y 對 Z 的迴歸直線斜率為 -0.4
12. 在收容所中有 n 隻流浪狗編號 1~ n 號，志工媽媽每次會由這 n 隻狗狗中選出若干隻編號不相鄰的狗狗放出來玩耍。舉例來說，若有 7 隻狗狗編號 1~7 號，志工媽媽可以放出編號 2、4、7 號，或是選擇放出 1、5 號，甚至一次只單放一隻狗狗也可以。假設 n 隻流浪狗共有 $f(n)$ 種選法。請選出正確的選項。
- (1) $f(3) = 4$ (2) 假設 $n = 8$ ，選到 8 號狗狗的方法數有 $f(6)$ 種
- (3) 假設 $n = 8$ ，沒選到 8 號狗狗的方法數有 $f(7)$ 種
- (4) $f(10) = 142$ (5) $f(9) = C_1^9 + C_2^8 + C_3^7 + C_4^6 + C_5^5$

第貳部分：選填題(占 40 分)

- A. 坐標平面上有相異三點 $A(2, 1)$ ， $B(-1, -1)$ ， $C(k^2 - 5, k + 3)$ ，其中 k 為正實數。若已知二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 通過 A 、 B 兩點，但必不通過 C 點，求 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- B. 如圖(1)，是一隻狗狗的腳掌印，我們按照圖示那樣數數字，數到 100 即停止。試問此時左邊第 2 支腳趾(前三個數字為 2、6、8)的所有數字總和為 。



圖(1)

C. 設甲、乙兩人隨機各寫一個三位數，求甲寫的數字比乙寫的數字大的機率是

_____。(化為最簡分數)

D. 已知三正數成等比數列，公比小於 1，其和為 67。現將各項依序減去 28、2、1 後，此三數變為等差數列。求原等比數列的公比為_____。(化為最簡分數)

E. 試求 $\frac{1}{\sqrt{1^3}} + \frac{1}{\sqrt{1^3+2^3}} + \frac{1}{\sqrt{1^3+2^3+3^3}} + \frac{1}{\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1^3+2^3+3^3+\cdots+30^3}} =$
_____。(化為最簡分數)

F. 有 10 個正數 $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ ，將此 10 個數字皆開根號再乘以 5 後得到新的 10 個數字為 $5\sqrt{a_1}, 5\sqrt{a_2}, \dots, 5\sqrt{a_{10}}$ 。已知這 10 個新數字之算術平均數為 7，標準差為 6，求原先 $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 的算術平均數為_____。(化為最簡分數)

G. 將「紅鳳凰黃鳳凰粉紅鳳凰」10 個字重新排列。原文有三組「鳳凰」，若希望排列後的結果變為恰有兩組「鳳凰」，位置不限，例如「鳳凰紅黃鳳凰粉鳳紅凰」是可以的，但「鳳凰凰鳳紅黃粉鳳紅凰」和「紅黃鳳凰鳳凰粉紅鳳凰」就不行。
試問總共有_____種排列方式。

H. 已知方程式 $\log_3 x^{\log_3 x} + \log_3 x^3 - 5 = 0$ 有兩實根 α 及 β ，求 $\alpha \cdot \beta =$ _____。
(化為最簡分數)

RA271 全國公私立高中 106 學年度第 1 學期第二次學科能力測驗
參考答案

第壹部分：選擇題

1.(5) 2.(1) 3.(4) 4.(5) 5.(3) 6.(2) 7.(1) 8.(1)(3)(5) 9.(1)(4)
10.(3) 11.(2)(5) 12.(1)(3)(5)

第貳部分：選填題

A. 4 或 2 B. 1666 C. $\frac{899}{1800}$ D. $\frac{2}{7}$ E. $\frac{60}{31}$ F. $\frac{17}{5}$ G. 8820 H. $\frac{1}{27}$