臺中市立臺中女子高級中等學校 106 學年度高三校內複習考試

數學考科解析

考試日期：106 年 9 月 4~5 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	4	3	5	3	3	2345	34	135	1235	134	45	1245	–	4
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	8	2	5	0	0	1	1	7	0	9	3	2	5	2
31	32	33	34											
5	6	1	8											

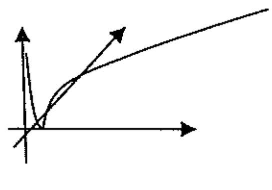
第壹部分：選擇題

一、單選題

1. $|4x-10|\le 2x+4 \Leftrightarrow |2x-5|\le x+2$，注意到 $x+2\ge 0$
   所以 $-x-2\le 2x-5\le x+2 \Leftrightarrow 1\le x\le 7$
2. $i^5+i^6+i^7+\cdots+i^{30}=i-1$
   由虛根成對定理知 $f(i-1)=f(-i-1)=0$
   因此，$\left[x-(i-1)\right]\left[x-(-i-1)\right]=x^2+2x+2$ 爲 $f(x)$ 之因式
3. $\begin{cases} D=36-16>0 \\ a+b=-6 \\ ab=4 \end{cases} \Rightarrow a<0,b<0$
   則 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b=-6+2\sqrt{ab}=-2$
4. $f(x)=x^3+ax+b$，其中 a、b 爲實數
   方程式 $f(x)=0$ 有一虛根 $2+i$
   則方程式 $f(x)=0$ 有另一虛根 $2-i$
   設實根爲 t，故三根之和 $=(2+i)+(2-i)+t=0$
   則 $t=-4$
   得 $f(x)=\left[(x-(2+i)\right]\left[x-(2-i)\right](x+4)=(x^2-4x+5)(x+4)$
   又 $x^2-4x+5>0$ 恆成立
   故 $f(x)<0$ 之解爲 $x<-4$
5. $A=f(1)+f(2)+f(3)+.....+f(2017)$
   $=3\sum_{k=1}^{2017}k^2-3\sum_{k=1}^{2017}k+\sum_{k=1}^{2017}1$
   $=\dfrac{2017\times 2018\times 4035}{2}-3\times\dfrac{2017\times 2018}{2}+2017$
   由 $8\times 10^9<A<9\times 10^9$，則整數 A 是 10 位數
6. 相當於求 $(2x+1)+(2y+1)+(2z+2)=100$
   $\Leftrightarrow x+y+z=48$ 的非負整數解組數
   共有 $H_{48}^3=C_{48}^{50}=C_2^{50}$ 種方法

二、多選題

7. (1)(2)(3)(4)：因爲 $f(x)$ 至多二次且 $f(2017)=1$，
   $f(2018)=2$，$f(2019)=3$
   由多項式的恆等定理
   可知 $f(x)=x-2016$
   (5)：三次實係數方程式 $f(x^3)-x^2=0$ 必有實根
8. (1)虛數無法比較大小
   (2)反例：$x=0$，
   則 $\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}=\sqrt{2}-1<\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2}=1$
   (3) $(a^2+b^2)(1+1)>(a+b)^2=1$
   $\Rightarrow a^2+b^2>\dfrac{1}{2}$
   $\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}\Rightarrow\dfrac{1}{4}>ab\Rightarrow\dfrac{1}{2}>2ab$
   (4) $f(x)=(0.7)^x$ 爲遞減函數，若 a、b 兩實數，且 $a>b$
   則 $f(a)<f(b)\Leftrightarrow(0.7)^a<(0.7)^b$
   (5) $f(x)=\log x$ 爲遞增函數，若 a、b 兩正實數，且 $a>b$，
   則 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}\Rightarrow f(\dfrac{1}{a})<f(\dfrac{1}{b})\Leftrightarrow\log\dfrac{1}{a}<\log\dfrac{1}{b}$
9. (1)：$g(36)=6\Rightarrow g(6)=3\Rightarrow f(3)=6$
   (2)：$g(124)-g(112)=g(124/112)\ne g(24/12)=g(24)-g(12)$
   (3)：$f(12)f(13)=f(25)=f(10)f(15)$
   (4)：$g(x)=\log_a x$ 凹口向下，$\dfrac{g(x)+g(y)}{2}\le g(\dfrac{x+y}{2})$
   (5)：$f(x)=a^x$ 與 $g(x)=\log_a x$ 圖形對稱於 $y=x$
   且 α 爲 $y=f(x)$ 與 $y=4-x$ 交點 x 座標，
   β 爲 $y=g(x)$ 與 $y=4-x$ 交點 x 座標，
   又 $y=x$ 交 $y=4-x$ 於 $(2,2)$
   故 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=2$
10. (1)：$b_{n+1}-b_n=\log_3\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$（定值）
    (2)：$0<b_1=\log_3 a_1<1$，$b_3=\log_3 a_3=-2$，公差爲負
    (3)：$0<b_1=b_3-2d<1\Rightarrow 0<-2-2d<1\Rightarrow -\dfrac{3}{2}<d<-1$
    故 $-1<b_2=b_3-d=-2-d<-\dfrac{1}{2}$
    (4)：$-\dfrac{7}{2}<b_4=b_3+d=-2+d<-3$
    (5)：$b_2+b_4=2b_3=-4$
11. (1)：C_3^7 (2)：P_3^7 (3)：C_3^7 (4)：C_3^7 (5)：$-C_3^7$
12. (1)：$0.5\%\times 100\%+99.5\%\times 3\%=3.485\%$
    (2)：$99.5\%\times 97\%=96.515\%$
    (3)：$\dfrac{0.5\%\times 100\%}{0.5\%\times 100\%+99.5\%\times 3\%}\approx 14.3\%$
    (4)：100%
    (5)：$99.5\%\times 3\%=2.985\%$
13. 設 $|\log_2 x|=ax+b$ 之三相異實根



    由小而大爲 $t,2t,4t$
    則 $\begin{cases} -\log_2 t=at+b......(1) \\ \log_2 2t=1+\log_2 t=2at+b...(2) \\ \log_2 4t=2+\log_2 t=4at+b....(3) \end{cases}$
    $\Rightarrow at=\dfrac{1}{2},b=-\dfrac{1}{4}$
    $\Rightarrow t=2^{-\frac{1}{4}},a=2^{-\frac{3}{4}}>2^{-1}=\dfrac{1}{2}$，$b=-\dfrac{1}{4}$
    (1) $a=2^{-\frac{3}{4}}>2^{-1}=\dfrac{1}{2}$
    (2) $b=-\dfrac{1}{4}<0$
    (3) $a>\dfrac{1}{2}>-b=\dfrac{1}{4}\Rightarrow a+b>0$

(5) $ab = 2^{-\frac{3}{4}}(-\frac{1}{4}) = -(2^{-\frac{3}{4}-2}) = -(2^{-\frac{11}{4}}) < -(2^{-\frac{12}{4}}) = -\frac{1}{8}$

第貳部分：選填題

A. 原式等價於 $\left|3^{\frac{x}{2}}+3^{-\frac{x}{2}}\right|+\left|3^{\frac{x}{2}}-3^{-\frac{x}{2}}\right|=18 \Leftrightarrow 2\cdot 3^{-\frac{x}{2}}=18$

故 $x=-4$

B. 令公比為 r 。$50=2\cdot r^{19} \Rightarrow r=5^{2/19}$

$\log a_1+\log a_2+\cdots+\log a_{18}$

$=\log a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{18}$

$=\log 2^{18}\cdot r^{1+2+\ldots+18}$

$=\log 2^{18}\cdot 5^{18}=18$

C. $a_1=1$

$\forall n\in N$ ，$a_{n+1}=a_n+\sqrt{a_n}+\frac{1}{4}=(\sqrt{a_n}+\frac{1}{2})^2$

$\Rightarrow a_2=(a_1+\frac{1}{2})^2=(\frac{3}{2})^2$

$\Rightarrow a_3=(\frac{3}{2}+\frac{1}{2})^2=(\frac{4}{2})^2$

$\Rightarrow a_4=(\frac{4}{2}+\frac{1}{2})^2=(\frac{5}{2})^2$

由數學歸納法 $\Rightarrow a_n=(\frac{n+1}{2})^2$ ，則 $a_{99}=2500$

D. $1000000(1+0.6\%)^{120}=\frac{x[1-(1+0.6\%)^{120}]}{1-(1+0.6\%)}$

$\Rightarrow x \fallingdotseq 11708.8$ 四捨五入得 $x=11709$

E. 設 $\log M$ 首數為 A ，尾數為 b

$\log M=A+b=\frac{-13}{5}$

$\Rightarrow \log\frac{1}{M}=\frac{13}{5}=2+0.6$

$\Rightarrow 2+\log 3<\log\frac{1}{M}<2+\log 4$

$\Rightarrow 300<\frac{1}{M}<400$

由 $100n<\frac{1}{M}<100(n+1)$

知 $n=3$

F. 3 上 3 下　方法 $\frac{6!}{3!3!}=20$

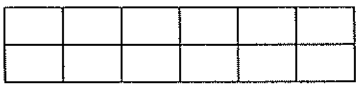
2 上 2 下 1 左 1 右　方法 $\frac{6!}{2!2!}=180$

1 上 1 下 2 左 2 右　方法 $\frac{6!}{2!2!}=180$

3 左 3 右　方法 $\frac{6!}{3!3!}=20$

所以機率為 $\frac{400}{4^6}=\frac{25}{256}$

G.

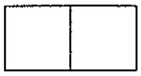


設 $2\times n$ 的長方格塗法有 a_n 個

可得遞迴關係：$\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=2 \\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \end{cases}$

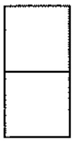
因此，$a_3=3$ ，$a_4=5$ ，$a_5=8$ ，$a_6=13$

Case1 左下角擺



舖法有 $a_6=13$ 種

Case2 左下角擺 2 個



舖法有 $a_4=5$ 種

所以，共 18 種