臺中市立臺中第一高級中等學校 106 學年度高三校內複習考試

數學考科解析

考試日期：106 年 09 月 11~12 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	5	1	1	4	1245	12	14	1245	234	13	1	8	4	4
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	1	5	9	4	8	5	1	2	1	2	1	5	2	2
31														
0														

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. $f(n)=\log_n(2.5n)$

$\Rightarrow f(n)=\dfrac{\log(2.5)+\log(n)}{\log(n)}=1+\dfrac{\log(2.5)}{\log(n)}>1$

又因為 n 為大於 1 的正整數，所以 $\log(n)$ 愈小，

可得 $f(n)$ 愈大，故選(1)

2. 因為 $b=r\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$ 又斜率 $b<0$ ，x 資料皆相同，

所以 μ_x 、 σ_x 皆相同而且選項中的 μ_y 也皆相同

因此 σ_y 愈大，相關係數 r 也愈大故選(5)

3. 兩球號碼之乘積為 4 的倍數的機率為

$$1-\frac{\overbrace{C_2^3}^{3個奇數選2個}+\overbrace{C_1^3}^{3個奇數中選1個}\times\overbrace{C_1^2}^{數字2或6選1個}}{C_2^6}=1-\frac{9}{15}=\frac{2}{5}$$

所以=$C_2^3(\frac{2}{5})^2(\frac{3}{5})=\frac{36}{125}$=0.288 ，故選(1)

4. 令 $b=ar,c=ar^2\Rightarrow d=ar^2+(ar^2-ar)=2ar^2-ar$

$a+d=32\Rightarrow a(1+2r^2-\mathrm{r})=32$

$b+c=24\Rightarrow a(r+r^2)=24$

$\dfrac{1+2r^2-r}{r+r^2}=\dfrac{4}{3}\Rightarrow r=3$，$\dfrac{1}{2}$ （不合）

$\Rightarrow(a,b,c,d)=(2,6,18,30)$ ，故選(1)

5. 設利率 r

甲方案：$3(1+r)^7+2(1+r)^8+(1+r)^9$

乙方案：$(1+r)^7+2(1+r)^8+3(1+r)^9$

丙方案：$2(1+r)^7+2(1+r)^8+2(1+r)^9$

丁方案：$2(1+r)^6+2(1+r)^7+(1+r)^8+(1+r)^9$

戊方案：$(1+r)^6+(1+r)^7+2(1+r)^8+2(1+r)^9$

明顯的，乙，丙方案均會大於甲方案

甲方案減丁方案$=(1+r)^8+(1+r)^7-2(1+r)^6>0$

戊方案減丁方案$=(1+r)^9+(1+r)^8-(1+r)^7-(1+r)^6>0$

故選(4)

二、多選題

6. $f(x)=(x^2-2x)^{100}=\left[(x-1)^2-1\right]^{100}$

$=(-1)^{100}+C_1^{100}(x-1)^2(-1)^{99}+C_2^{100}(x-1)^4(-1)^{98}+\ldots$

$+C_{100}^{100}(x-1)^{200}(-1)^0$

$f(-1)=3^{100}$ ，故選(1)(2)(4)(5)

7. 第二次取到紅球之機率等於第一次取到紅球機率 $\dfrac{2}{3}$

第三次取到白球之機率等於第一次取到白球機率 $\dfrac{1}{3}$

白球先取完的機率等於紅球在最後一球機率等於第一次取到紅球機率 $\dfrac{2}{3}$

紅球先取完的機率等於白球在最後一球機率等於第一次取到白球機率 $\dfrac{1}{3}$

第四次時，取到第二個白球之機率

$\dfrac{8\times7\times4\times3\times C_1^3}{12\times11\times10\times9}=\dfrac{28}{165}$

故選(1)(2)

8. (1)123123 與 021021 的距離為 4

因為第 1、3、4、6 的位置不同數字

所以距離為 4

(2)231023 與 222222 的距離為 2

因為第 2、3、4、6 的位置不同數字

所以距離為 4

(3)與 231023 的距離為 1 的四元字串有 $C_5^6\times3=18$ 個

(4)與 231023 的距離為 2 的四元字串有 $C_4^6\times3^2=135$ 個

(5)所有四元字串與 231023 的距離總和為 $6\times4^5\times3=18432$

先算與第 1 個位置不同的數字有 $4^5\times3$，共有 6 個位置

故選(1)(4)

9. $f(x)=a(x-105)(x-106)+b(x-106)(x-107)$

$+c(x-105)(x-107)$

$\Rightarrow f(105)=2b$ 、 $f(106)=-c$ 、 $f(107)=2a$

$\Rightarrow f(108)=a(3)(2)+b(2)(1)+c(3)(1)=6a+2b+3c$

$$\begin{cases}2\le f(105)\le6\\3\le f(106)\le13\\2\le f(107)\le8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\le 2b\le6\\3\le -c\le13\\2\le 2a\le8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6\le 6a\le24\\2\le 2b\le6\\-39\le 3c\le-9\end{cases}$$

$\Rightarrow-31\le f(108)\le21$

故選(1)(2)(4)(5)

10. 已知正整數數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $\forall n\in N,a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

設 $a_1=u,a_2=v$ （ u 、 v 為正整數）

a_1	a_2	a_3	a_4
u	v	$u+v$	$u+2v$
a_5	a_6	a_7	a_8
$2u+3v$	$3u+5v$	$5u+8v$	$8u+13v$
a_9	a_{10}	a_{11}	
$13u+21v$	$21u+34v$	$34u+55v$	

(1) $u=1$ 且 $v=1$

$\Rightarrow a_{10}=21+34=55$

(2) $u=1$ 且 $v=3$

$\Rightarrow a_{10}=21\times1+34\times3=123$

(3) $a_{11}=157\Rightarrow34u+55v=157$

又 u 、 v 為正整數

$\Rightarrow v=1,u=3$ ，即 $a_1=3$

(4) $a_{10}=11a_5$

$\Rightarrow21u+34v=11(2u+3v)$

$\Rightarrow v=u$ 即 $a_2=a_1$

(5) a_p 、 a_q 、 a_r 爲等差數列（公差爲正）

$\Rightarrow\ a_q < a_r = 2a_q - a_p$ 　又 $a_p \ge 1$

$\Rightarrow\ a_q < a_r < 2a_q = a_q + a_q < a_q + a_{q+1} = a_{q+2}$

$\Rightarrow\ r = q+1$

$\Rightarrow\ a_p = 2a_q - a_r = 2a_q - a_{q+1} = 2a_q - (a_{q-1} + a_q) = a_{q-2}$

$\Rightarrow\ p = q-2$

所以 $p + r - 2q = (q-2) + (q+1) - 2q = -1$

故選(2)(3)(4)

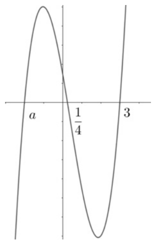
11. $(2^x - 8)((\frac{1}{5})^x - \frac{1}{\sqrt[4]{5}})((\frac{1}{3})^{-x} - 3^a) > 0$

$\Leftrightarrow (2^x - 2^3)(5^{-x} - 5^{\frac{-1}{4}})(3^x - 3^a) > 0$

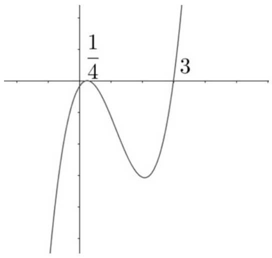
$\Leftrightarrow (x-3)(-x - \frac{-1}{4})(x-a) > 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x - \frac{1}{4})(x-a) < 0$

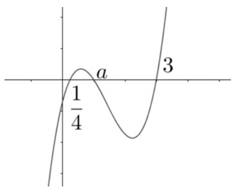
(a)當 $a < \frac{1}{4}$ 時



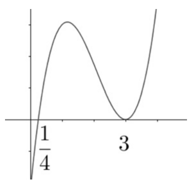
(b)當 $a = \frac{1}{4}$ 時



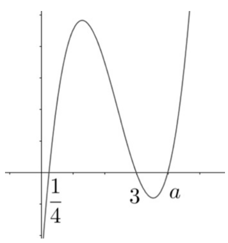
(c)當 $\frac{1}{4} < a < 3$ 時



(d)當 $a = 3$ 時



(e)當 $a > 3$ 時



由這 5 個圖可知，故選(1)(3)

第貳部分：選填題

A. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 1$

$= (x-2)^4 + 8(x-2)^3 + 22(x-2)^2 + 27(x-2) + 13$

$f(2-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^4 + 8(-\sqrt{2})^3 + 22(-\sqrt{2})^2 + 27(-\sqrt{2}) + 13$

$= 61 - 43\sqrt{2}$

$a + b = 61 - 43 = 18$

B. $\dfrac{0.98 \times 0.9}{0.98 \times 0.9 + 0.02 \times 0.1} = \dfrac{0.882}{0.884} = \dfrac{441}{442}$

C. 數列 $<\log_2(a_n)>$ 爲等差數列 $\Rightarrow <a_n>$ 爲等比數列

$f(x) = \dfrac{3}{1+x^3}$

$\Rightarrow f(x) + f(\frac{1}{x}) = \dfrac{3}{1+x^3} + \dfrac{3}{1+(\frac{1}{x^3})} = \dfrac{3+3x^3}{1+x^3} = 3$

又因爲 $a_1 \cdot a_{106} = 1$ 可得

$a_2 \cdot a_{105} = a_3 \cdot a_{104} = ... = a_{104} \cdot a_3 = a_{105} \cdot a_2 = a_{106} \cdot a_1 = 1$

所以 $f(a_1) + f(a_{106}) = 3$ 、 $f(a_2) + f(a_{105}) = 3$ 、…… 、

$f(a_{105}) + f(a_2) = 3$ 、 $f(a_{106}) + f(a_1) = 3$

因此 $\sum_{k=1}^{106} f(a_k) = \dfrac{106 \times 3}{2} = 159$

D. 早上 4 點時測量其體溫爲 13℃，經 2 小時候其體溫已降爲 11℃

$\Rightarrow 11 - 10 = (13-10)(\frac{1}{2})^{2k} \Rightarrow (\frac{1}{2})^{2k} = \frac{1}{3}$

設截至早上 4 點爲止，流浪漢已死亡 t 小時

$\Rightarrow 13 - 10 = (37-10)(\frac{1}{2})^{kt} \Rightarrow (\frac{1}{2})^{kt} = \frac{1}{9}$

$\therefore t = 4$

E. 不相鄰的機率 $= 1 -$ 相鄰的機率 $= 1 - \dfrac{6 \times 3 \times 2!}{16 \times 15} = \dfrac{17}{20} = 0.85$

F. $f(\alpha) = \alpha^3 - 7 = 0 \Rightarrow \alpha^3 = 7$ ，同理 $\beta^3 = 7$ ， $\gamma^3 = 7$

由根與係數關係可得 $\alpha + \beta + \gamma = 0$

$g(\alpha) + g(\beta) + g(\gamma) = 7 + 7 + 7 - 3 - 3 - 3 = 12$

G. 令矩形平行梯形高的邊長爲 y ，平行上下底的邊長爲 x

$\Rightarrow\ y : \dfrac{22-x}{2} = 12 : 6 \Rightarrow x + y = 22$

由算幾不等式可得 $\dfrac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy} \Rightarrow xy \le 121$

故所求最大面積爲 121，此時內接矩形爲正方形，邊長爲 11

H. 全部 1000 人平均 $\dfrac{7000 + 72000}{1000} = 79$

$16 = \dfrac{\sum_{i=1}^{100} x_i^2}{100} - 4900 \Rightarrow \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 491600$

$25 = \dfrac{\sum_{i=1}^{900} y_i^2}{900} - 6400 \Rightarrow \sum_{i=1}^{900} y_i^2 = 5782500$

1000 人之標準差爲 $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{100} x_i^2 + \sum_{i=1}^{900} y_i^2}{1000} - 79^2}$

$= \sqrt{\dfrac{491600 + 5782500}{1000} - 6241} \approx 5.75 \approx 5.8$

故 $n = 5$

I. $\because a_{k+1} - a_k = 1$ 或 -1

又 $6 = a_{13} - a_1$

$= (a_{13} - a_{12}) + (a_{12} - a_{11}) + (a_{11} - a_{10}) + ... + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1)$

設 $a_{k+1} - a_k$ 共有 x 個 1 因此有 $(12 - x)$ 個 -1

$\Rightarrow 6 = 1 \cdot x + (-1) \cdot (12 - x) \Rightarrow x = 9$

因此數列共有 $\dfrac{12!}{9!3!} = 220$ 個