

107 學年度全國高級中學第二次學科能力測驗

107.09.06

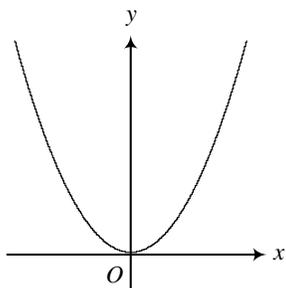


RA276

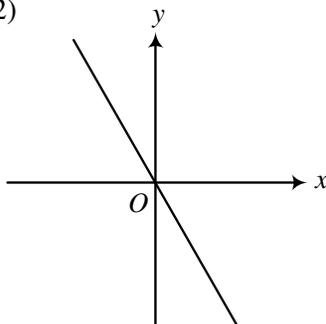
一、單選題(占 35 分)

1. 設 $f(x) = ax^n$ 為實係數多項式函數，若 $a \times (-1)^n < 0$ ，則 $f(x)$ 的圖形可能為下列何者？

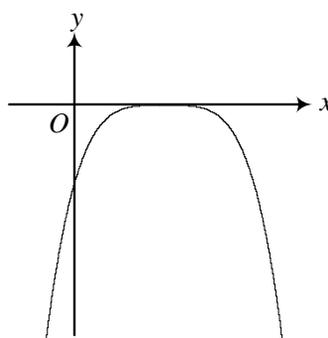
(1)



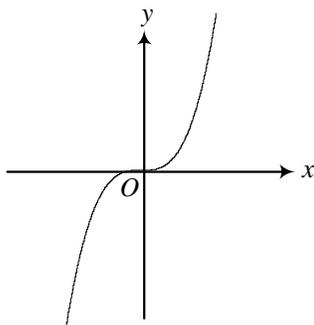
(2)



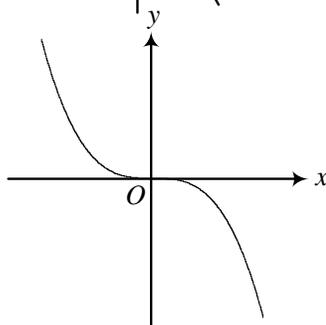
(3)



(4)



(5)



2. 設投擲兩顆公正骰子一次的點數和為 a ，且 $f(x) = (a-7)x^2 + 4x + 2$ ，已知 $f(x)$ 的圖形為開口向上的拋物線，則 $f(x)$ 的圖形與 x 軸相交於相異兩點的機率為下列何者？

- (1) $\frac{5}{36}$ (2) $\frac{1}{5}$ (3) $\frac{5}{18}$ (4) $\frac{1}{3}$ (5) $\frac{3}{5}$

3. 設 a, b, c, d 皆為實數，且 $f(x) = (x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2 + (x-d)^2$ ，已知 $f(2) = 80$ ， $f(6) = 48$ ，則 a, b, c, d 的標準差為下列何者？

- (1) $\sqrt{11}$ (2) $\sqrt{13}$ (3) 4 (4) $\sqrt{19}$ (5) $\sqrt{21}$

4. 已知等比數列 $\{a_n\}$ 的首項 $a_1 > 0$ ，公比 $r > 1$ ，且 $3a_5 + a_7 = 4a_6$ ，若此數列中有兩相異項 a_t, a_s 滿足 $\sqrt{a_t a_s} = a_7$ ，則 $t+s-r$ 之值為下列何者？

- (1) 10 (2) 11 (3) 12 (4) 13 (5) 14

5. 設 $a > 0$ ， $b = \log_2 5$ ，若 $a^b = 16$ ，則 $a^{(b^2)}$ 之值為下列何者？

- (1) $\sqrt[4]{5}$ (2) 25 (3) 32 (4) 256 (5) 625

6. 若將 1, 3, 5, 7 四個數字任意排列成一個四位數 $abcd$ ，則滿足 $c+d \geq a+b$ 的機率為下列何者？(例如：四位數 3175，即滿足 $7+5 \geq 3+1$)

- (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{3}{4}$ (5) $\frac{5}{6}$

7. 試問下列五個數中，何者最大？

- (1) $\frac{22!}{5!}$ (2) 10^{11} (3) 6^{14} (4) $4^5 \times 5^{12}$ (5) $\sum_{k=0}^{34} C_k^{34}$

二、多選題(占 25 分)

8. 設 $A(\sqrt{2})$, $B(\sqrt{8})$ 為數線上兩點且 $P(t)$ 為線段 \overline{AB} 上一點, 已知 $a > 0$, $b > 0$, $\overline{PA} : \overline{PB} = a : b$, 試問下列哪些選項是正確的?
- (1) 若 $a > b$, 則 $|t - \sqrt{2}| < |t - \sqrt{8}|$ (2) 若 a, b 為有理數, 則 t 必為有理數
 (3) 若 a 為有理數且 b 為無理數, 則 t 必為無理數
 (4) 若 $a = b$, 則 $\sqrt{2}, t, \sqrt{8}$ 成等差數列 (5) 若 $a = b$, 則 $\sqrt{2}, t, \sqrt{8}$ 成等比數列
9. 設一次函數 $f(x) = ax + b$ 的圖形為斜率大於 0、y 截距大於 0 的一直線, 且與直線 $x = 1$ 交於點 $A(1, k)$, 若 $f\left(1 - \frac{b}{a}\right) \times f(0) = 9$, 則 k 之值可能為下列哪些選項?
- (1) $\frac{1}{\sqrt{11} - \sqrt{10}}$ (2) $\sqrt{19 + 2\sqrt{90}}$ (3) $5.\bar{9}$ (4) $3^{\sqrt{5}}$ (5) π
10. 設 $a > 0$, 若不等式 $|2x + 1| > |3x - a|$ 的其中一個整數解為 $x = 2$, 則 a 之值可能為下列哪些選項?
- (1) $\frac{1}{107}$ (2) $\frac{107}{108}$ (3) $\frac{2019}{2018}$ (4) $\log_5 107$ (5) $(\sqrt{11})^{\sqrt{5}}$
11. 設多項式 $f(x) = (x - 12)^{16}$ 展開式中的 x^2 項係數為 a , 試問下列哪些選項是正確的?
- (1) $f(x)$ 為偶函數 (2) 不等式 $f(x) > 0$ 的解為全體實數
 (3) 多項式 $f(x)$ 除以 $(x - 11)(x - 13)$ 的餘式為 1
 (4) a 的最高位數字為 1 (5) a 的末兩位數為 80
12. 設實係數多項式 $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$, 已知 1 為方程式 $f(x) = 0$ 之一根, 試問下列哪些選項是正確的?
- (1) $f(0)f(4) < 0$ (2) $1 - 3i$ 可能為方程式 $f(x) = 0$ 之一根
 (3) $2 + i$ 可能為方程式 $f(x) = 0$ 之一根 (4) 若方程式 $f(x) = 0$ 有虛根, 則 $f(\pi) > 0$
 (5) 若 $a > 3$, 則不等式 $f(x) < 0$ 的解為 $x < 1$

三、選填題(占 40 分)

- A. 若集合 $U = \{2^{-2}, 2^{-1}, 2, 2^2, 2^3\}$, $a \in U$, $b \in U$, 且 $a \neq b$, 則滿足 $ab > 1$ 的數對 (a, b) 共有 _____ 組。
- B. 在 1 與 32 之間插入 n 項後, 此 $n + 2$ 個數成等比數列, 若所有項(包含 1 與 32)乘積的整數部分為 10 位數, 則 n 至少為 _____。
- C. 仲逸參加今年的大學個人申請, 已知所填的六個校系全部通過第一階段篩選, 且各校第二階段甄試日期如下:

校系	霍金大學 量子學系	柴山大學 大數據系	神崎大學 數學系	宮城大學 AI 系	幻影大學 神學系	浦度大學 精算系
第二階段 甄選日期	4 月 3 日	4 月 11 日	4 月 3 日	4 月 5 日	4 月 3 日	4 月 11 日

仲逸決定從六個校系中至少選一個校系參加第二階段甄試, 若甄試日期在同一天校系, 則最多只參加其中一校系的甄試, 試問仲逸選擇參加第二階段甄試的情形共有 _____ 種。

D. 爾琪諾幼兒園為了因應少子化的衝擊，近幾年推出了以下幾項措施：

(一)每天上午都有外籍老師親自教導美語 (二)每星期免費提供兩個時段的才藝班

(三)每月的月費全面六折

根據園長 Alice 統計發現 105 年與 106 年學生人數的成長率分別為 5%與 10%，出現逆勢成長的趨勢。若 105 年、106 年、107 年這三年學生人數的平均成長率要超過 25%，則 107 年的成長率必須至少為_____%。(無條件進位到整數位)

E. 設 $z = ((a+b)+2i)((c-8)+2i)$ ，其中 a, b, c 分別代表投擲一顆公正骰子三次依序出現的點數，試問滿足 z 為實數的序組 (a, b, c) 共有_____組。

F. 彩彩老師統計班上 28 位學生補習的科目數(x)與學期總成績的分數(y)，已知 x, y 的算術平均數分別為 $\mu_x = 3$ 、 $\mu_y = 60$ ，標準差分別為 σ_x 、 σ_y ，且相關係數為 $r = \frac{-3}{5}$ ，若班上的小雨目前只有物理與英文兩科有補習，且用 y 對 x 的迴歸直線方程式推估她的學期總成績為 70 分，

則 $\frac{\sigma_x}{\sigma_y} =$ _____。(請化為最簡分數)

G. 若從各位數字皆相異且各位數字和為 8 的所有三位數中任意選出一個三位數，則此數可被 11 整除的機率為_____。(請化為最簡分數)

H. 在數列 $\langle a_n \rangle$ 中，已知 $a_2 = 10$ ， $a_5 = 23$ ， $a_{15} = -8$ 且任意連續四項之和均為 20，則

$a_{108} =$ _____。

RA276 107 學年度全國高級中學第二次學科能力測驗 參考答案

一、1. (4) 2. (4) 3. (1) 4. (2) 5. (5) 6. (3) 7. (1)

二、8. (4) 9. (1)(2)(3)(4) 10. (3) (4) 11. (3)(4)(5) 12. (2)(4)(5)

三、A. 12 B. 10 C. 23 D. 70 E. 21 F. $\frac{3}{50}$ G. $\frac{1}{12}$ H. -5