數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
答案	(4)	(4)	(1)	(2)	(5)	(3)	(1)	(4)	(1)(2)(3)(4)
題號	10.	11.	12.						
答案	(3)(4)	(3)(4)(5)	(2)(4)(5)						

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (4)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：測驗學生對於單項函數圖形的認知能力

解析：(1)╳：由圖形可知 $a>0$ 且 n 為正偶數，所以 $a\times(-1)^n>0$ (不合)

(2)╳：圖形為一直線且斜率為負，所以 $n=1$，$a<0\Rightarrow a\times(-1)^n>0$ (不合)

(3)╳：由圖形可知 $f(0)\neq 0$ (不合)

(4)○：由圖形可知 $a>0$ 且 n 為正奇數，所以 $a\times(-1)^n<0$，且圖形通過原點

(5)╳：由圖形可知 $a<0$ 且 n 為正奇數，所以 $a\times(-1)^n>0$ (不合)

故選(4)。

2. (4)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、第二冊第三章〈機率〉

目標：測驗學生對於二次函數的基本概念及條件機率的計算能力

解析：因為 $f(x)$ 的圖形為開口向上的拋物線

所以 $a-7>0\Rightarrow a>7$

投擲兩顆公正骰子一次，其點數和為 7 的情形為 $(6,1)$，$(1,6)$，$(5,2)$，$(2,5)$，$(4,3)$，$(3,4)$，共有 6 種

又點數和為 k 的方法數與點數和為 $14-k$ 的方法數相同，其中 $k=2$，3，……，6

所以滿足 $a>7$ 的方法數為 $\frac{1}{2}(6^2-6)=15$

若 $f(x)$ 的圖形與 x 軸相交於相異兩點

則判別式 $D=4^2-4\times2\times(a-7)>0\Rightarrow a<9$

又滿足 $7<a<9$ 的情形為 $(6,2)$，$(2,6)$，$(5,3)$，$(3,5)$，$(4,4)$，共有 5 種

因此所求機率為 $\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

故選(4)。

註：

點數和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
方法數	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

3. (1)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、第二冊第四章〈數據分析〉

目標：測驗學生是否具備利用標準差的定義來解題的能力

解析：展開可得 $f(x)=4x^2-2(a+b+c+d)x+(a^2+b^2+c^2+d^2)$

因為 $f(2)=80$，$f(6)=48$

所以 $\begin{cases}16-4(a+b+c+d)+(a^2+b^2+c^2+d^2)=80\\144-12(a+b+c+d)+(a^2+b^2+c^2+d^2)=48\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}-4(a+b+c+d)+(a^2+b^2+c^2+d^2)=64\\-12(a+b+c+d)+(a^2+b^2+c^2+d^2)=-96\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b+c+d=20\\a^2+b^2+c^2+d^2=144\end{cases}$

因此 a，b，c，d 的標準差 $\sigma=\sqrt{\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2)-\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2}=\sqrt{36-25}=\sqrt{11}$

故選(1)。

4. (2)

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：測驗學生是否能利用等比數列的一般項來解題

解析：因為 $3a_5+a_7=4a_6$

所以可得 $3a_1r^4+a_1r^6=4a_1r^5$

$\Rightarrow a_1r^4(r^2-4r+3)=0 \Rightarrow (r-1)(r-3)=0 \Rightarrow r=3$ （因為 $r>1$）

又 $\sqrt{a_ta_s}=a_7$，所以 $a_1r^{t-1}\times a_1r^{s-1}=(a_1r^6)^2$

$\Rightarrow r^{t+s-2}=r^{12} \Rightarrow t+s=14$

因此可知 $t+s-r=14-3=11$

故選(2)。

5. (5)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：測驗學生對於指數律與對數律的基本運算能力

解析：可知 $a^{(b^2)}=(a^b)^b=16^{\log_2 5}=16^{\log_{16}625}=625$

故選(5)。

6. (3)

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：測驗學生是否能利用對稱性與古典機率來解題

解析：先考慮 $c+d=a+b$ 的情形

因為 $1+3+5+7=16$，所以 $c+d=a+b=8$

討論如下

c	1	7	1	7	5	3	5	3
d	7	1	7	1	3	5	3	5
a	3	3	5	5	1	1	7	7
b	5	5	3	3	7	7	1	1

所以共有 8 種

又由對稱性可知 $c+d>a+b$ 的方法數與 $c+d<a+b$ 的方法數一樣

因此 $P(c+d\geq a+b)=P(c+d=a+b)+P(c+d>a+b)$

$$=\frac{8}{4!}+\frac{\frac{1}{2}(4!-8)}{4!}$$

$$=\frac{8}{24}+\frac{8}{24}=\frac{2}{3}$$

故選(3)。

7. (1)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉、第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：測驗學生對於二項式定理的應用與比較各數之間的大小關係

解析：(1) $\frac{22!}{5!}=\underbrace{6\times7\times\cdots\cdots\times22}_{17\text{項}}>(4\times4\times4\times4\times4)\times(\underbrace{5\times5\times\cdots\cdots\times5}_{12\text{項}})=4^5\times5^{12}$

(2) $4^5\times5^{12}=2^{10}\times5^{12}=5^2\times(2\times5)^{10}=25\times10^{10}>10\times10^{10}=10^{11}$

(3)因為 $\log 6^{14}=14\log 6\approx 14\times(0.3010+0.4771)=10.8934$，所以 6^{14} 為 11 位數

又 $4^5\times5^{12}=25\times10^{10}$ 為 12 位數，因此 $6^{14}<4^5\times5^{12}$

(5) $\sum_{k=0}^{34}C_k^{34}=(1+1)^{34}=2^{34}=4^{17}=\underbrace{4\times4\times\cdots\cdots\times4}_{17\text{項}}<(4\times4\times4\times4\times4)\times(\underbrace{5\times5\times\cdots\cdots\times5}_{12\text{項}})=4^5\times5^{12}$

故選(1)。

二、多選題

8. (4)

出處：第一冊第一章〈數與式〉、第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：測驗學生對於有理數、無理數、數列的基本認知能力與分點公式的應用

解析：由分點公式可知 $t=\dfrac{b\sqrt{2}+a\sqrt{8}}{a+b}$

(1)╳：若 $a>b$，則 $\overline{PA}>\overline{PB}\Rightarrow|t-\sqrt{2}|>|t-\sqrt{8}|$

(2)╳：若 $a\in Q$，$b\in Q$，則 $t=\dfrac{b\sqrt{2}+a\sqrt{8}}{a+b}=\dfrac{(2a+b)\sqrt{2}}{a+b}\notin Q$

(3)╳：反例：$a=1$，$b=\sqrt{2}\Rightarrow t=\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}+1\times\sqrt{8}}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=2\in Q$

(4)○：若 $a=b$，則 $\overline{PA}=\overline{PB}\Rightarrow t-\sqrt{2}=\sqrt{8}-t$，即 $\sqrt{2}$，t，$\sqrt{8}$ 成等差數列

(5)╳：若 $a=b$，則可得 $t=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{8}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，因為 $\sqrt{2}\times\sqrt{8}\neq\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2$

所以 $\sqrt{2}$，t，$\sqrt{8}$ 不為等比數列

故選(4)。

9. (1)(2)(3)(4)

出處：第一冊第一章〈數與式〉、第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：測驗學生對於一次函數圖形的認知及是否能利用算幾不等式來解題

解析：因為 $f(x)$ 的圖形為斜率大於 0、y 截距大於 0 的一直線

所以可知 $a>0$，$b>0$，又與直線 $x=1$ 的交點為 $A(1,k)$，因此可得 $a+b=k$

若 $f\left(1-\dfrac{b}{a}\right)\times f(0)=9$，則 $\left(a\left(1-\dfrac{b}{a}\right)+b\right)b=9\Rightarrow ab=9$

由算幾不等式可得 $a+b\geq 2\sqrt{ab}=6\Rightarrow k\geq 6$

(1)○：$\dfrac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}=\sqrt{11}+\sqrt{10}>6$

(2)○：$\sqrt{19+2\sqrt{90}}=\sqrt{10}+\sqrt{9}>6$

(3)○：$5.\overline{9}=6$

(4)○：$3^{\sqrt{5}}>3^2=9>6$

(5)╳：$\pi<6$ (不合)

故選(1)(2)(3)(4)。

10. (3)(4)

出處：第一冊第一章〈數與式〉、第一冊第二章〈多項式函數〉、第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：測驗學生是否具備指數與對數的基本認知能力以及能求出不等式的解

解析：由題意可得 $|2x+1|^2>|3x-a|^2\Rightarrow(3x-a)^2-(2x+1)^2<0\Rightarrow(5x+1-a)(x-a-1)<0$

$\Rightarrow\dfrac{a-1}{5}<x<a+1$，因為 $x=2$ 為不等式的其中一個整數解，所以 $\dfrac{a-1}{5}<2<a+1\Rightarrow 1<a<11$

〈另解〉因為 $x=2$ 為不等式的其中一個整數解

所以代入可得 $|2\times2+1|>|3\times2-a|$

$\Rightarrow|6-a|<5\Rightarrow-5<6-a<5\Rightarrow 1<a<11$

(1)╳：$\dfrac{1}{107}<1$ (不合)

(2)╳：$\dfrac{107}{108}<1$ (不合)

(3)○：$1<\dfrac{2019}{2018}<11$

(4)○：$1=\log_5 5<\log_5 107<\log_5 125=3<11$

(5)╳：$(\sqrt{11})^{\sqrt{5}}=11^{\frac{\sqrt{5}}{2}}>11$ (不合)

故選(3)(4)。

11. (3)(4)(5)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、第一冊第三章〈指數、對數函數〉、第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：測驗學生能否結合多項式與指對數的性質，並利用二項式定理來解題

解析：(1)╳：因為 $f(-x)=(-x-12)^{16}=(x+12)^{16}\neq f(x)$

所以 $f(x)$ 不為偶函數

(2)╳：不等式 $f(x)>0$ 的解為 $x\in R$ 且 $x\neq 12$

(3)○：設 $f(x)=(x-11)(x-13)Q(x)+m(x-11)+n$

$f(11)=(11-12)^{16}=1\Rightarrow n=1$

$f(13)=(13-12)^{16}=1\Rightarrow 2m+1=1\Rightarrow m=0$

所以 $f(x)=(x-11)(x-13)Q(x)+1$，即 $f(x)$ 除以 $(x-11)(x-13)$ 的餘式為 1

(4)○：由二項式定理可得 $(x-12)^{16}=\sum\limits_{k=0}^{16}C_k^{16}\times x^k\times(-12)^{16-k}$

$\Rightarrow a=C_2^{16}\times(-12)^{16-2}=120\times12^{14}=12^{15}\times10$

$\Rightarrow \log a=1+15\log 12=1+15(2\log 2+\log 3)$

$\approx 1+15(2\times0.3010+0.4771)=17.1865=17+0.1865$

因為 $\log 1<0.1865<\log 2$，所以 a 的最高位數字為 1

(5)○：承(4)可知 $a=10\times12^{15}=10(10+2)^{15}$

$=10(C_0^{15}\times2^{15}+C_1^{15}\times2^{14}\times10+C_2^{15}\times2^{13}\times10^2+\cdots\cdots+C_{15}^{15}\times10^{15})$

$=2^{15}\times10+100k$，其中 $k\in N$

又 2^n 的個位數字依序以 2，4，8，6 四個一循環

所以 2^{15} 的個位數字為 8，即 a 的末兩位數為 80

故選(3)(4)(5)。

12. (2)(4)(5)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：測驗學生是否能利用虛根成對定理與多項式函數圖形的概念來解題

解析：由題意可知 $x-1$ 為 $f(x)$ 的因式，由長除法

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-2x+(a-2) \\
\hline
x-1 & x^3-3x^2+ax+b \\
 & x^3-x^2 \\
\hline
 & -2x^2+ax \\
 & -2x^2+2x \\
\hline
 & (a-2)x+b \\
 & (a-2)x-(a-2) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

可得 $f(x)=(x-1)(x^2-2x+(a-2))$

$\Rightarrow b=-a+2$

(1)╳：反例：$a=-1$，$b=3\Rightarrow f(x)=x^3-3x^2-x+3$

$\Rightarrow f(0)f(4)=3\times(64-48-4+3)>0$

(2)○：若 $1-3i$ 為方程式 $f(x)=0$ 之一根

則由虛根成對定理可知 $1+3i$ 為另一根

即 $x^2-2x+10$ 為 $f(x)$ 的因式，當 $a=12$ 時，$f(x)=(x-1)(x^2-2x+10)$

所以 $1-3i$ 可能為方程式 $f(x)=0$ 之一根

(3)╳：若 $2+i$ 為方程式 $f(x)=0$ 之一根

則由虛根成對定理可知 $2-i$ 為另一根

所以方程式 $f(x)=0$ 的三根為 1，$2+i$，$2-i$，由根與係數可得 $1+(2+i)+(2-i)=5\neq 3$ (不合)

(4)○：若方程式 $f(x)=0$ 有虛根

則 $f(x)$ 的圖形與 x 軸恰有一個交點 $(1,0)$，且圖形右側會往上攀升，即 $f(\pi)>f(1)=0$

(5)○：若 $a>3$，則方程式 $x^2-2x+(a-2)=0$ 的判別式 $D=(-2)^2-4(a-2)=12-4a<0$

即對於任意實數 x，$x^2-2x+(a-2)>0$ 恆成立

所以不等式 $(x-1)(x^2-2x+(a-2))<0$ 的解為 $x<1$

故選(2)(4)(5)。

第貳部分：選填題

A. 12

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉、第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：評量學生是否具備指數的基本概念，並能利用窮舉法來計算方法數

解析：討論如下

(i)若 $a=2^{-2}$，則 $b=2^3$

(ii)若 $a=2^{-1}$，則 $b=2^2$，2^3

(iii)若 $a=2$，則 $b=2^2$，2^3

(iv)若 $a=2^2$，則 $b=2^{-1}$，2，2^3

(v)若 $a=2^3$，則 $b=2^{-2}$，2^{-1}，2，2^2

故共有 $1+2+2+3+4=12$ 組。

B. 10

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉、第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：評量學生是否能應用等比數列的性質及利用對數來處理位數問題的能力

解析：設插入的數為 x_1，x_2，……，x_n，因為 1，x_1，x_2，……，x_n，32 成等比，

所以 $1\times x_1\times x_2\times\cdots\cdots\times x_n\times 32=32^{1+\frac{n}{2}}$，又 $32^{1+\frac{n}{2}}$ 的整數部分為 10 位數

因此可得 $9\le\log 32^{1+\frac{n}{2}}<10\Rightarrow 9\le 5\left(1+\frac{n}{2}\right)\log 2<10\Rightarrow 2\left(\frac{9}{5\log 2}-1\right)\le n<2\left(\frac{2}{\log 2}-1\right)$

$\Rightarrow 9.95\cdots\cdots\le n<11.28\cdots\cdots$

故 n 至少為 10。

C. 23

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：評量學生是否能讀懂題意，並照題述求出其組合數

解析：由題意可知甄試日期為 4 月 3 日的有三個校系，4 月 5 日的有一個校系，4 月 11 日的有兩個校系

討論如下

(i)仲逸恰選一個校系：方法數為 $C^6_1=6$

(ii)仲逸恰選兩個校系：方法數為 $C^3_1C^1_1+C^3_1C^2_1+C^1_1C^2_1=3+6+2=11$

(iii)仲逸恰選三個校系：方法數為 $C^3_1C^1_1C^2_1=6$

故共有 $6+11+6=23$ 種。

D. 70

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：評量學生能否讀懂題意，並具備計算平均成長率的能力

解析：設 107 年的成長率為 $r\times 100\ \%$

由題意可得 $(1+0.05)(1+0.1)(1+r)>(1+0.25)^3$

$\Rightarrow \frac{21}{20}\times\frac{11}{10}\times(1+r)>\left(\frac{5}{4}\right)^3$

$\Rightarrow 1+r>\left(\frac{5}{4}\right)^3\times\frac{20}{21}\times\frac{10}{11}=\frac{3125}{1848}\approx 1.69$

$\Rightarrow r>0.69$

故 107 年的成長率必須至少為 70 %。

E. 21

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：評量學生是否具備複數運算的基本能力，並能否結合重複組合來解題

解析：因為 $z=((a+b)+2i)((c-8)+2i)=((a+b)(c-8)-4)+(2(a+b)+2(c-8))i\in R$

所以 $2(a+b)+2(c-8)=0$

$\Rightarrow a+b+c=8$，其中 a，b，c 為正整數且滿足 $1\le a\le 6$，$1\le b\le 6$，$1\le c\le 6$

設 $a'=a-1$，$b'=b-1$，$c'=c-1$，可得 $a'+b'+c'=5$，其中 $0\le a'\le 5$，$0\le b'\le 5$，$0\le c'\le 5$

所以其解個數為 $H^3_5=C^{3+5-1}_5=C^7_5=21$，故序組 (a,b,c) 共有 21 組。

F. $\frac{3}{50}$

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：評量學生是否具備求出迴歸直線方程式的能力

解析：因為迴歸直線必過點 (μ_x , μ_y)，所以 $(3 , 60)$ 為迴歸直線上一點

又小雨的補習科目數為 2，學期總成績為 70 分

所以 $(2 , 70)$ 亦為迴歸直線上一點

設迴歸直線的方程式為 $y=ax+b$

將 $(3 , 60)$，$(2 , 70)$ 兩點代入可得 $\begin{cases} 3a+b=60 \cdots\cdots\cdots\cdots\text{①} \\ 2a+b=70 \cdots\cdots\cdots\cdots\text{②} \end{cases}$

①－②得 $a=-10$

又迴歸直線的斜率 $a=\frac{r\sigma_y}{\sigma_x}$，所以 $\frac{-3}{5}\times\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=-10 \Rightarrow \frac{\sigma_x}{\sigma_y}=\frac{3}{50}$。

G. $\frac{1}{12}$

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：評量學生能否依題意計算條件機率

解析：因為 $8=7+1+0=6+2+0=5+3+0=5+2+1=4+3+1$

所以各位數字皆相異且各位數字和為 8 的所有三位數

共有 $2\times2!+2\times2!+2\times2!+3!+3!=4+4+4+6+6=24$ 個

其中可被 11 整除只有 341 與 143，故所求為 $\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$。

H. -5

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：評量學生是否能找出數列的規律性

解析：因為任意連續四項之和均為 20，所以 $a_1+a_2+a_3+a_4=a_2+a_3+a_4+a_5$

$\Rightarrow a_5=a_1=23$，依此類推可知 $a_{4k+1}=23$，同理 $a_{4k+2}=10$，$a_{4k+3}=-8$

又 $a_{4k}+a_{4k+1}+a_{4k+2}+a_{4k+3}=20$，所以 $a_{4k}=20-23-10-(-8)=-5$

故 $a_{108}=a_{4\times27}=-5$。