台北區高中 108 年(107 學年度)
高三上第一次學測模擬考數學(107-B1)試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（占 60 分）

一、單選題（占 30 分）

1. 小販賣包子，小包子5個112元，大包子3個140元，且規定小包子需以5個爲單位，大包子需以3個爲單位購買。若某日營業額爲2100元，則賣出的包子數有可能爲下列何者？
(1)70個 (2)71個 (3)72個 (4)73個 (5)74個。 【108 北區學測模①】

答：(2)

解：$112x+140y=2100\Rightarrow 4x+5y=75\Rightarrow\begin{cases}x=15\\y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=10\\y=7\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=5\\y=11\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0\\y=15\end{cases}$

包子數 $5x+3y=84$ 或 71 或 58 或 45

2. 社團中有男社員8人，女社員4人，若將所有社員均分爲三組，則每組必有女生的分法共有幾種？
(1)1680種 (2)3360種 (3)6720種 (4)10080種 (5)20160種。 【108 北區學測模①】

答：(2)

解：$\underbrace{\left(C_2^4C_1^2C_1^1\times\frac{1}{2!}\right)}_{\text{女生依}(2,1,1)\text{分}}\times\underbrace{\left(C_2^8C_3^6C_3^6\right)}_{\text{其餘男生補足每組4人}}=6\times560=3360$

3. 若複數 $1+i$ 爲實係數方程式 $x^4+2x^2+ax+8=0$ 的一個解，則 a 的值爲何？
(1)-2 (2)2 (3)-4 (4)4 (5)-6。 【108 北區學測模①】

答：(3)

解：$(1+i)^4+2(1+i)^2+a(1+i)+8=0\Rightarrow a(1+i)=-4-4i\Rightarrow a=-4$

4. 給定三集合 $A=\left\{x\,\middle|\,x\text{爲實數且滿足}x^3-x\le0\right\}$，
$B=\left\{x\,\middle|\,x\text{爲實數且滿足}|x|+|x-5|=1\right\}$，
$C=\left\{x\,\middle|\,x\text{爲實數且滿足}|x-2|-3|x+1|>2x-9\right\}$，
則 A、B、C 三集合的關係爲何？
(1)$B\subset A\subset C$ (2)$B\subset C\subset A$ (3)$A\subset C\subset B$ (4)$A\subset B\subset C$ (5)$C\subset B\subset A$。
【108 北區學測模①】

答：(1)

解：$A=\left\{x\,\middle|\,x\le-1\text{或}0\le x\le1\right\}$、$B=\phi$、$C=\left\{x\,\middle|\,x<2\right\}$

俞克斌數學

5. 所謂「1.01的勤勉法則」是指如果你每天都比前一天進步0.01，一年以後你將具備有現在的37.8倍的能力，此結果是由1.01^{365}約等於37.8而得出。如果情況相反，你每天都比前一天退步0.01，請利用對數表估算你365天以後，大約還有現在的多少倍能力？請選出最接近的選項：（$\log 9.9 \approx 0.9956$）

(1)0.3　(2)0.2　(3)0.05　(4)0.02　(5)0.001。　【108 北區學測模①】

答：(4)

解：$\log\left(0.99\right)^{365} = 365\left(0.9956-1\right) = -1.606 = -2+0.394 \approx \log 2.4\cdots\times 10^{-2} \approx \log 0.024\cdots$

6. 設10個正數x_1，x_2，……，x_{10}，考慮下列三個條件：

(A) $\sum_{i=1}^{10} x_i$之值　(B) $\sum_{i=1}^{10} x_i^2$之值　(C) $\sum_{i=1}^{10} \sqrt{x_i}$之值

令x_1，x_2，……，x_{10}的標準差爲σ，請選出正確的選項：

(1)只需要條件(B)即可求出σ　(2)只需要條件(A)與(B)即可求出σ

(3)只需要條件(B)與(C)即可求出σ　(4)只需要條件(A)與(C)即可求出σ

(5)就算由條件(A)與(B)與(C)也無法求出σ。　【108 北區學測模①】

答：(2)

解：$\sigma = \sqrt{\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \left(\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i\right)^2}$

二、多選題（占30分）

7. 已知整係數方程式$3x^3+ax^2+bx+1=0$且$a>0$，$b>0$，則下列哪些選項可能爲此方程式的有理根？

(1)1　(2)-1　(3)$\frac{1}{3}$　(4)$-\frac{1}{3}$　(5)$-\frac{2}{3}$。　【108 北區學測模①】

答：(2)(4)

解：$3x^3+ax^2+bx+1=0$且$a>0$，$b>0$，表僅有負根

由牛頓定理得知，可能爲-1、$-\frac{1}{3}$

8. 設a、b爲實數且$a>b>1$，考慮函數$f\left(x\right)=a^x$，$g\left(x\right)=\log_a x$，$h\left(x\right)=\log_b x$，請選出正確的選項：

(1)$y=f\left(x\right)$與$y=g\left(x\right)$的圖形對稱於直線$x=y$

(2)$y=f\left(x\right)$與$y=g\left(x\right)$的圖形沒有交點

(3)$g\left(38\right)-g\left(19\right)=g\left(76\right)-g\left(38\right)$

(4)$\frac{f\left(38\right)}{f\left(19\right)}=\frac{f\left(76\right)}{f\left(38\right)}$

(5)對於所有實數$x>0$，$g\left(x\right)<h\left(x\right)$必成立。　【108 北區學測模①】

答：(1)(3)

解：(1)$y=f\left(x\right)$與$y=g\left(x\right)$互爲反函數，圖形對稱於直線$x=y$

(2)當 $a=\sqrt{2}$ ，$y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 的圖形有 2 個交點

(3) $g(38)-g(19)=\log_a \frac{38}{19}=\log_a 2=\log_a \frac{76}{38}=g(76)-g(38)$

(4) $\frac{f(38)}{f(19)}=a^{38-19}=a^{19}\neq a^{38}=a^{76-38}=\frac{f(76)}{f(38)}$

(5)對於所有實數 $x>1$ ，$g(x)<h(x)$ 才成立

9. 已知 $f(x)$、$g(x)$ 爲實係數多項式：

$f(x)=x+\left(1+x^2\right)+\left(1+x^2\right)^2+\left(1+x^2\right)^3+\cdots\cdots+\left(1+x^2\right)^{10}$ ，

$g(x)=2047\cdot\frac{x-(-1)}{1-(-1)}+2045\cdot\frac{x-1}{(-1)-1}$ ，請選出正確的選項：

(1)在 $f(x)$ 的展開式中，x^4 項的係數爲 120　(2) $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式爲 1023

(3) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x+1)$ 的餘式爲 $g(x)$　(4) $f(2)$ 的值爲七位數

(5) $f(2)$ 的最高位數字爲 1。　【108 北區學測模①】

答：(3)(5)

解：(1)在 $f(x)$ 的展開式中，x^4 項的係數爲 $C_2^2+C_2^3+C_2^4+\cdots+C_2^{10}=C_3^{11}=165$

(2) $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式爲 $f(1)=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{10}=2047$

(3) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x+1)$ 的餘式爲 $g(x)=f(1)\times\frac{(x-(-1))}{(1-(-1))}+f(-1)\times\frac{(x-1)}{(-1-1)}$

(4)(5) $f(2)=2+5+5^2+5^3+\cdots+5^{10}=2+\frac{5^{11}-5}{4}$ ，

但 $\log\frac{5^{11}}{4}\approx 7.087$ ，故 $f(2)$ 的值爲 8 位數、最高位數字爲 1

10. 實數數列〈a_n〉、〈b_n〉滿足 $b_k=a_{k+1}-a_k$ ，$k=1$，2，……，請選出正確的選項：

(1)若〈b_n〉＝〈2018〉，則〈a_n〉爲等差數列

(2)若〈b_n〉爲等差數列，則〈a_n〉爲等比數列

(3)若〈b_n〉爲等比數列且公比不爲 1，則〈a_n〉爲等比數列

(4)若〈a_n〉爲等比數列且公比不爲 1，則〈b_n〉爲等比數列

(5)設 b_n 爲等差數列，若 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=5$，則 $a_{100}=9900$。【108 北區學測模①】

答：(1)(4)

解：(1)若〈b_n〉＝〈2018〉，則〈a_n〉爲公差 2018 的等差數列

(2)反例：〈b_n〉$=\langle 1,2,3,\cdots\rangle$，則〈$a_n$〉$=\langle 1,2,4,7,\cdots\rangle$ 不爲等比數列

(3)反例：〈b_n〉$=\langle 1,3,9,\cdots\rangle$，則〈$a_n$〉$=\langle 1,2,5,14,\cdots\rangle$ 不爲等比數列

(4)若〈a_n〉爲等比數列且公比不爲 1，

則〈b_n〉$=\langle a_{n+1}-a_n\rangle=\langle a_n(r-1)\rangle$ 爲公比 r 的等比數列

(5)設 b_n 爲等差數列，若 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=5$，

則 $b_1=1$，$b_2=3$，$b_3=5$，…

則 $a_n=1+\underbrace{(1+3+5+\cdots)}_{n-1\text{項}}=(n-1)^2+1$，故 $a_{100}=9802$

11. 兩變數 X 與 Y 的10筆資料 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，……，(x_{10},y_{10})。

令 μ_X、μ_Y 分別爲 X、Y 的平均數，σ_X、σ_Y 分別爲 X、Y 的標準差。

將資料標準化爲 X' 和 Y'（即 $x_i'=\dfrac{x_i-\mu_X}{\sigma_X}$，$y_i'=\dfrac{y_i-\mu_Y}{\sigma_Y}$），

已知 X'、Y' 的相關係數爲 r，請選出正確的選項：

(1) $\sum_{i=1}^{10} x_i'=0$　(2) x_i'，$i=1$，2，……，10 的標準差爲1　(3) $\sum_{i=1}^{10} x_i'y_i'=10$

(4) Y' 對 X' 的最適合直線必過原點

(5) Y' 對 X' 的最適合直線斜率不可能大於1。　【108 北區學測模①】

答：(1)(2)(4)(5)

解：(1) $\sum_{i=1}^{10} x_i'=10\,\overline{X'}=10\times 0=0$，正確

(2) x_i'，$i=1$，2，……，10 的標準差爲1，正確

(3)不能確定 $\sum_{i=1}^{10} x_i'y_i'=10$

(4) Y' 對 X' 的最適合直線必過 $(\overline{X'},\overline{Y'})=(0,0)$

(5) Y' 對 X' 的最適合直線斜率 $m=r\le 1$

12. 蔬果的農藥殘留一直是消費者關注的議題。

某年，政府提出市售蔬果農藥殘留之監測計畫，由各縣市衛生局每月抽送蔬果檢體6件至藥物食品檢驗局的檢驗站、衛生局區域聯合分工檢驗體系之農藥殘留檢驗室。

依據衛生福利部公告食品中殘留農藥檢驗方法—多重殘留分析方法以及二硫代胺基甲酸鹽類之檢驗予以檢測。

另增加液相層析串聯質譜儀分析，農藥檢驗項目共187種。

本次計畫共抽驗1761件檢體，檢驗之部分結果如下：

表1：市售農產品農藥殘留依市場別分析統計表

市場別	抽驗件數	檢出農藥		不符規定	
		件數	%	件數	%
傳統市場	427	141	33.0	23	5.4
非傳統市場	1334	425	31.9	49	3.7
總計	1761	566	32.1	72	4.1

表2：市售農產品中有機蔬果與非有機蔬果農藥殘留分析統計表

類別	抽驗件數	檢出農藥		不符規定	
		件數	%	件數	%
有機	121	3	2.5	0	0
非有機	1640	563	34.3	72	4.4
總計	1761	566	32.1	72	4.1

會考試題製學

（資料來源：藥物食品檢驗局調查研究年報.26：第225～255頁，2008年）
上列各表中，不符規定之檢體原因有兩類：
一爲檢驗出的殘留農藥超過殘留容許限量，二爲檢驗出不得檢出之農藥。
若已知抽驗檢體源自於傳統市場之有機蔬果檢出農藥者有1件，不符規定者爲0件；
抽驗檢體源自於非傳統市場之非有機蔬果檢出農藥者有423件，不符規定者有49件。
請根據上述資料選出正確的選項：
(1)在市售農產品之檢體中，非有機蔬果農藥殘留檢驗結果不符規定者約有4.4%
(2)在市售農產品之檢體中，源自於傳統市場且檢出農藥者約有33%
(3)在檢體源自於傳統市場的條件下，檢驗出農藥者約有33%
(4)在檢體源自於傳統市場的條件下，有機蔬果檢驗出農藥者不超過1%
(5)在檢體源自於非傳統市場的條件下，非有機蔬果檢驗出不符規定者不超過2%。
【108 北區學測模①】

答：(3)(4)

解：(1) $\frac{72}{1761}\approx 0.0408$　(2) $\frac{141}{1761}\approx 0.08$
(3) $\frac{141}{427}\approx 0.33$　(4) $\frac{1}{427}\approx 0.0023$　(5) $\frac{49}{1334}\approx 0.0367$

第貳部分：選填題（占40分）

A. 已知$\log 10a$與$\log 3$的首數相同，$\log 100a$與$\log 56$的尾數相同，則實數a爲_____。
【108 北區學測模①】

答：0.56

解：$\log 10a$與$\log 3$的首數相同均爲0，$\log 100a$與$\log 56$的尾數相同均爲$\log 5.6$
故$a=0.56$

B. 設m爲實數，若對於每個實數x，不等式$\frac{1}{4}x^2-mx+(2m+15)\le 0$恆無解。
在滿足此條件之m的範圍中，有三個相異整數a、b、c成等比數列，
則$a+c$的值爲_____。
【108 北區學測模①】

答：5

解：$\frac{1}{4}x^2-mx+(2m+15)>0$恆成立，故判別式$m^2-(2m+15)<0\Rightarrow -3<m<5$
故m的範圍中，有三個相異整數$a=1$、$b=2$、$c=4$成等比數列，

C. 已知三實數$\log_2 a$、$\log_4 b$、$\log_8 c$成等差數列，可得到a、b、c之關係式爲
$b=a^x\cdot c^y$，則數對(x,y)=_____。（化爲最簡分數）
【108 北區學測模①】

答：$\left(1,\frac{1}{3}\right)$

解：$\log_{64}a^6$、$\log_{64}b^3$、$\log_{64}c^2$成等差數列
故a^6、b^3、c^2成等比數列，則$a^6\times c^2=\left(b^3\right)^2\Rightarrow b=a^1\times c^{\frac{1}{3}}$

D. 將0，0，1，1，2，3，5共七個數字排成一列，則共可排出_____種相異的七位數。
【108 北區學測模①】

答：900

解：$\underbrace{\frac{7!}{2!2!}}_{\text{任意排}}-\underbrace{\frac{6!}{2!}}_{0\text{在首位}}=1260-360=900$

E. 將1，2，3，4這四個數字隨意填入右圖四個方格中，每個方格填入一個數字，數字不得重複，試求填入的數字滿足$A>B$且$C>B$的機率爲_____。（化爲最簡分數）
【108 北區學測模①】

A	C
B	D

答：$\frac{1}{3}$

解：$\frac{\overbrace{C_3^4\times 2}^{A>C>B\text{或}C>A>B}}{4!}=\frac{1}{3}$

F. 請計算級數$\frac{5}{1^2+2^2}+\frac{7}{1^2+2^2+3^2}+\cdots\cdots+\frac{2k+3}{1^2+2^2+\cdots\cdots+(k+1)^2}+\cdots\cdots$
$+\frac{43}{1^2+2^2+\cdots\cdots+21^2}$的值爲_____。（化爲最簡分數）
【108 北區學測模①】

答：$\frac{30}{11}$

解：所求$=\sum_{k=1}^{20}\frac{2k+3}{1^2+2^2+\cdots\cdots+(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{20}\frac{2k+3}{\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)}$

$=6\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=6\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{22}\right)=\frac{30}{11}$

G. 小明測量某物品的重量五次，得到五筆原始數據分別爲1.98，2.01，2.02，1.95，x。小明把每個數據都乘以100，再減去200後得到一組新數據。若已知新數據的平均爲-2，則五筆原始數據的標準差爲_____。
【108 北區學測模①】

答：$\frac{\sqrt{10}}{100}$

解：新數據：-2、1、2、-5、$100x-200$的平均數爲-2（亦即：$x=1.94$）

新數據的離均差：0、3、4、-3、-4

新數據的標準差：$\sqrt{\frac{1}{5}(0+9+16+9+16)}=\sqrt{10}$

原數據的標準差：$\frac{\sqrt{10}}{100}$

俞克斌數學

H. 台彩公司推出「雙贏彩」，玩法爲從01～24的號碼中任選12個號碼進行投注。
開獎時，開獎單位將隨機開出12個號碼，
你的12個選號如果全部對中當期開出之12個號碼，或者全部未對中，均爲中頭獎，
恰中11個號碼或恰中1個號碼則得二獎。
現有某公司模仿「雙贏彩」推出「小雙贏彩」，
玩法爲從01～12的號碼中任選6個號碼進行投注。
開獎時，開獎單位隨機從01～12的號碼中開出6個號碼爲獎號，
你的6個選號如果全部對中獎號或者全部未對中，均爲中頭獎，
恰中5個號碼或恰中1個號碼則得二獎。
請問投注一注小雙贏彩得二獎的機率爲_____。（化爲最簡分數）【108北區學測模①】

答：$\frac{6}{77}$

解：$\frac{\underbrace{C_5^6 C_1^6}_{5同1不同} + \underbrace{C_1^6 C_5^6}_{1同5不同}}{C_6^{12}} = \frac{6}{77}$

克斌數學