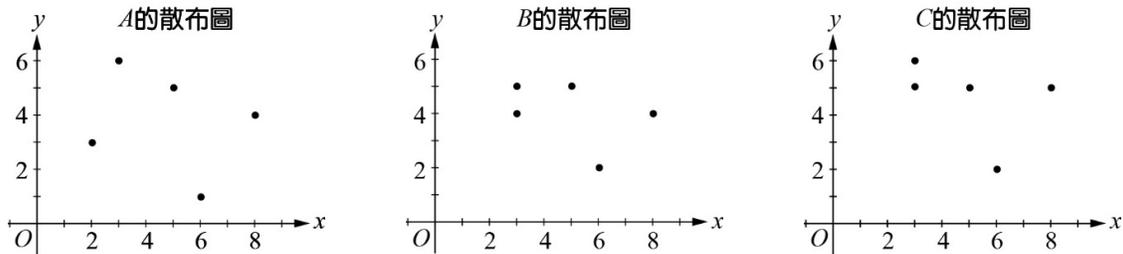




一、單選題(占 25 分)

1. 設 A,B,C 是三組資料，其散布圖由左至右排列如圖(1)：



圖(1)

若 A 組資料與 B 組資料的相關係數分別約為 -0.23 與 -0.84 ，則下列何者最可能是 C 組資料的相關係數？(1) 0 (2) -0.21 (3) -0.43 (4) -0.85 (5) -1

2. 下列哪一個選項中的數值無法表示成兩個整數的平方和？

- (1) 2 (2) 17 (3) 13^2 (4) 3^5 (5) $(13^2+17^2)(19^2+23^2)$

3. 若 $a = \sqrt{1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2}}$ ，則下列哪一個選項中的敘述是正確的？

- (1) $102 < 107a < 104$ (2) $104 < 107a < 106$ (3) $106 < 107a < 108$
 (4) $108 < 107a < 110$ (5) $110 < 107a < 112$

4. 若 a, b 為方程式 $x^2 - px + q = 0$ (其中 $p > 0, q > 0$) 的二相異實根。若 $a, b, -2$ 這三個數經過適當的排序後可以形成等差數列，也可以經過另一適當的排序後形成等比數列，則 $p - q$ 之值為下列哪一個選項中的數值？

- (1) -2 (2) -1 (3) 1 (4) 2 (5) 9

5. 用 r 表示紅球、 y 表示黃球、 b 表示黑球，由加法及乘法原理可知，從二顆相同紅球和二顆相異黃球取出若干顆球的所有取法可由 $(1+r+r^2)(1+y)(1+y)$ 的展開式 $1+2y+y^2+r+2ry+ry^2+r^2+2r^2y+r^2y^2$ 表示出來。如上述展開式中的常數項 "1" 表示一顆球都不取、"2y" 表示取出一顆黃球的方法數為 2 種、" ry^2 " 表示取出一顆紅球與二顆黃球的方法數為 1 種、" $2r^2y$ " 表示取出二顆紅球和一顆黃球的方法數為 2 種。請問下列哪一選項中的式子可以表示從 3 顆相同的紅球、3 顆相同的黃球、3 顆皆相異的黑球取出若干顆球且滿足所有的黃球全部都取出或全部都不取出的所有取法？

- (1) $(1+r+r^2+r^3)(1+y^3)(1+b)^3$ (2) $(1+r+r^2+r^3)(1+y)^3(1+b^3)$
 (3) $(1+r^3)(1+y+y^2+y^3)(1+b^3)$ (4) $(1+r)^3(1+y)^3(1+b)^3$
 (5) $(1+r+r^2+r^3)(1+y^3)(1+b+b^2+b^3)$

二、多選題(占 35 分)

6. 設三次實係數多項式 $f(x)$ 除以 $x-1, x-2, x-4$ 所得餘式分別為 2, 1, -1 ，且令多項式 $g(x) = 2 \cdot \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} + \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} + (-1) \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)}$ 。請選出正確的選項。

(1) $g(x)=x+3$ (2) $f(5)=g(5)$ (3) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式為 $-x+3$

(4) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)(x-4)$ 的餘式為 $g(x)$

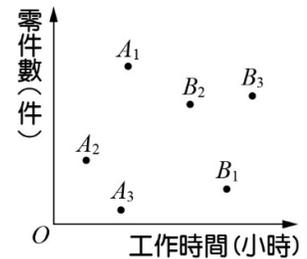
(5) 若 $f(x)$ 之領導係數為正數，且 $f(5)>0$ ，則 $f(6)$ 之值必為正

7. 坐標平面上，直線 $y=a(a>0)$ 與函數 $y=2^x, y=4^x$ 的圖形分別交於點 $A、B$ 。以 d_a 表示此兩點距離（即 \overline{AB} ），請選出正確的選項。

(1) $d_2 = \frac{1}{2}$ (2) $d_8 = d_{\frac{1}{8}}$ (3) $d_3 + d_5 < 2$ (4) 對任意正數 a ， d_a 恆小於 8

(5) 若 p, q, r 三數皆大於 1 且 $q = \sqrt{pr}$ ，則 $d_q = \frac{d_p + d_r}{2}$

8. 三名工人加工同一種零件，他們在一天中的工作情況如圖(2)，其中點 A_k 的 x, y 坐標分別為第 k 名工人「上午」的工作時間和加工的零件數，點 B_k 的 x, y 坐標分別為第 k 名工人「下午」的工作時間和加工的零件數(其中 $k=1, 2, 3$)。請選出正確的選項。



圖(2)

(1) 第 2 名工人在這一天的工作時間最長

(2) 第 3 名工人在這一天加工的零件總數最大

(3) 第 3 名工人在上午平均每小時加工的零件數最大

(4) 第 2 名工人在下午平均每小時加工的零件數最大

(5) 第 2 名工人在這一天平均每小時加工的零件數最大

9. 設 n 為正整數， O 為原點 $(0,0)$ ，一次函數 $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{n}{2}$ 之圖形交 x 軸正向於 $P(n,0)$ ，交 y 軸正向於 $Q(0, \frac{n}{2})$ 。當坐標平面上之 x, y 坐標皆為整數的點稱為格子點，假設

$B(n)$ 為 $\triangle OPQ$ 邊界上的格子點個數， $I(n)$ 為 $\triangle OPQ$ 內部的格子點個數。請選出正確的

選項。(1) $B(8)=16$ (2) $I(8)=9$ (3) $\sum_{k=1}^{20} B(2k)=840$ (4) $\sum_{k=1}^{20} I(2k)=2470$

(5) 當 n 為正偶數時，則 $\triangle OPQ$ 面積 $= I(n) + \frac{B(n)}{2} - 1$

10. 設 $\langle a_n \rangle$ 為等差數列，且公差 $d \neq 0$ ，其前 n 項和 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ，請選出正確的選項。

(1) 若 $a_1 + a_2 > 0$ ，則 $a_1 + a_3 > 0$ (2) 若 $a_1 + a_4 > 0$ ，則 $a_1 a_4 > a_2 a_3$

(3) 若 $a_1 > 0$ 且 $d > 0$ ，則 $\frac{S_2}{2} + \frac{S_6}{6} > \frac{S_4}{4}$ (4) 若 $S_3 + S_{107} > 2S_{55}$ ，則 $d > 0$

(5) 若 $a_1 > 0$ 且 $d > 0$ ，則 $2 \log \frac{S_{10}}{10} > \log a_4 + \log a_7$

11. 有一種魔術洗牌，操作過程如下：

設 $N=2^n$ (n 為正整數)，將 N 張卡牌 x_1, x_2, \dots, x_N 依次放入序號為 $1, 2, \dots, N$ 的 N 個位置，得到排列 $P_0 = x_1, x_2, \dots, x_N$ 。接下來，將排列 P_0 中奇數位置的卡牌取出，依序放入對應的前 $\frac{N}{2}$ 個位置，同時將排列 P_0 中偶數位置的卡牌取出，依序放入對應的後 $\frac{N}{2}$ 個位置

置，此時可得到新排列 $P_1 = x_1, x_3, \dots, x_{N-1}, x_2, x_4, \dots, x_N$ ，我們將此操作稱為一次 C 變換。同理，將排列 P_1 分成前後兩段，每段 $\frac{N}{2}$ 張卡牌，並對每段作一次 C 變換，可得到新排列 P_2 。依此類推，當 $0 \leq i \leq n-1$ 時，將 P_i 分成 2^i 段，每段 $\frac{N}{2^i}$ 個數，並對每段作一次 C 變換，得到新排列 P_{i+1} 。

例如，當 $N=8$ 時，排列 $P_0 = x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ ，此時 x_7 位於 P_0 中的第 7 個位置。

排列 $P_1 = x_1, x_3, x_5, x_7, x_2, x_4, x_6, x_8$ ，此時 x_7 位於 P_1 中的第 4 個位置。

排列 $P_2 = x_1, x_5, x_3, x_7, x_2, x_6, x_4, x_8$ ，此時 x_7 位於 P_2 中的第 4 個位置。

排列 $P_3 = x_1, x_5, x_3, x_7, x_2, x_6, x_4, x_8$ ，此時 x_7 位於 P_3 中的第 4 個位置。

當 $N=2^5$ 時，關於下列敘述，請選出正確的選項。

- (1) 不論做幾次的 C 變換， x_1 永遠位於第 1 個位置
- (2) 不論做幾次的 C 變換， x_{32} 永遠位於第 32 個位置，即最後一個位置
- (3) x_{22} 位於 P_1 之前半段位置 (4) x_{22} 位於 P_2 之第 22 個位置
- (5) x_{22} 位於 P_3 之第 25 個位置

12. 從 0, 1, 3, 5, 7 五個數字中取出三個相異數字分別作二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的係數。請選出正確的選項。

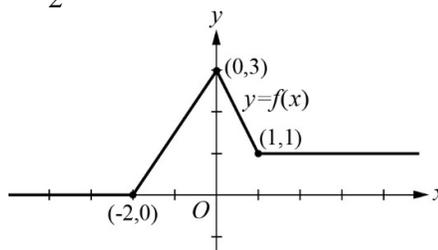
- (1) 總共可作出 60 個不同的二次方程式 (2) 總共可作出 48 個不同的二次方程式
- (3) 總共可作出 18 個有相異實根之不同的二次方程式
- (4) 總共可作出 2 個有相等實根之不同的二次方程式
- (5) 總共可作出 6 個有兩負根之不同的二次方程式

三、選填題(占 40 分)

A. 已知「碘 131 」半衰期僅八天（每八天輻射強度衰減一半）。原子能委員會於 9 月 25 日採樣分析某大學研究用核反應器周圍環境的「碘 131 」殘留量，偵測到「碘 131 」之輻射強度，即殘留量濃度為每公斤 61 貝克，懷疑與輻射外洩有關。經此採樣分析後，該大學才承認匿報輻射外洩，並承認該校核反應器在 9 月 1 日發生輻射外洩事件。請問該校核反應器發生輻射外洩時，「碘 131 」之輻射強度(殘留量濃度)為每公斤_____貝克。

B. 設 $f(x) = \log_2\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$ ，若 $\sum_{k=1}^n f(k) < -5$ ，則正整數 n 的最小值為_____。

C. 已知函數 $f(x)$ 的圖形如圖(3)，令函數 $g(x) = -5f\left(-\frac{1}{2}x+1\right) - 3$ 。若 $g(x)$ 在 $x=p$ 時，有最小值為 q ，則數對 $(p, q) =$ _____。



圖(3)

D. 一項「過關遊戲」規則為：在第 n 關要拋擲一顆公正的骰子 n 次，若這 n 次拋擲所出現的點數和大於 2^n ，才算過第 n 關。請問連續過前三關的機率為_____。
 （化至最簡分數）。

E. 已知二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ (其中 $a,b,c \in R$ 且 $a \neq 0$)，若不等式 $f(x)>0$ 的解為 $2 < x < 3$ ，則 $\frac{b^2+1}{c}$ 的最大值為_____。（化至最簡分數）

F. 將 24 顆雞蛋分裝到紅、黃、綠的三個籃子，要求條件如下：每個籃子都要有雞蛋，且紅籃子裡要裝偶數顆，黃、綠兩個籃子裡都裝奇數顆，則這 24 顆雞蛋分裝的方法數為_____。

G. 假設年底某直轄市市長大選前，某一家新聞媒體公布最新民意調查資料如表(1)：
 表(1)

選民政黨傾向	占選民的百分比	支持候選人甲之比率	支持候選人乙之比率	其他候選人之總比率
A 黨	28%	20%	70%	10%
B 黨	34%	60%	20%	20%
無特定政黨傾向	38%	40%	30%	30%

若已知一位民調受訪者支持候選人甲，則該位受訪者為無特定政黨傾向的機率為_____。（化至最簡分數）

H. 有 10 筆數據 (x_i, y_i) ， $i=1,2,\dots,10$ ，算術平均數 $\mu_x=5$ ，經過 $x'_i=2x_i$ 、 $y'_i=3y_i$ ， $i=1,2,\dots,10$ 的變換後， y'_i 對 x'_i 的迴歸直線為 $y'=9x'-60$ 。若再經過另一組 $x''_i=3x_i+5$ 、 $y''_i=2y_i$ ， $i=1,2,\dots,10$ 的變換後，則 y''_i 對 x''_i 的迴歸直線為_____。

RA278 107 學年度臺中一中第一次複習考數學考科 參考答案

一、1. (3) 2. (4) 3. (3) 4. (3) 5. (1)

二、6. (3)(4)(5) 7. (1)(2)(3)(5) 8. (4)(5) 9. (1)(2)(3)(4)(5) 10. (3)(4)(5) 11. (1)(2)(4) 12. (2)(3)(5)

三、A. 488 B. 63 C. (2, -18) D. $\frac{100}{243}$ E. $\frac{-5}{3}$ F. 66 G. $\frac{38}{103}$ H. $y'' = 4x'' - 60$