

# 數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
答案	(5)	(2)	(2)	(3)	(4)	(1)(3)(4)	(2)(3)(4)	(1)(4)(5)	(1)(2)(5)
題號	10.	11.	12.						
答案	(3)(4)	(1)(4)(5)	(1)(2)(5)						

## 第壹部分：選擇題

### 一、單選題

1. (5)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：了解多項式的虛根成對定理及長除法

解析：由虛根成對定理及方程式恰有三個根得知， $1+i$  與  $1-i$  互為共軛複數根

推得  $x^2 - 2x + 2$  為  $x^3 + ax^2 + bx + 4$  的二次因式，用長除法計算如下：

$$\begin{array}{r}
 1 \quad + \quad 2 \\
 1-2+2 \overline{) 1 \quad + \quad a \quad + \quad b \quad + \quad 4} \\
 \underline{1 \quad - \quad 2 \quad + \quad 2} \phantom{+ 4} \\
 (a+2) \quad + \quad (b-2) \quad + \quad 4 \\
 \underline{2 \quad - \quad 4 \quad + \quad 4} \\
 0
 \end{array}$$

$$\text{得} \begin{cases} a+2=2 \\ b-2=-4 \end{cases} \Rightarrow a=0, b=-2$$

∴ 方程式的實根為  $-2$

故選(5)。

2. (2)

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：級數的運算

$$\text{解析：} \because \frac{S_{12}}{12} - \frac{S_{10}}{10} = 2 \quad \therefore \frac{12(a_1+a_{12})}{12} - \frac{10(a_1+a_{10})}{10} = 2$$

$$\text{故 } a_{12} - a_{10} = 4 \quad \therefore 2d = 4 \Rightarrow d = 2$$

$$\therefore S_{2012} = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2} = 2012(-2012) + \frac{2012 \times (2012-1) \times 2}{2} = -2012$$

故選(2)。

3. (2)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：了解對數的定義及對數函數的圖形

解析： $A(3, 2)$  代入  $y = \log_a x \Rightarrow 2 = \log_a 3 \Rightarrow a^2 = 3$

$$\therefore a = \sqrt{3} \approx 1.732$$

$$\text{則 } f(x) = \log_{(2-a)}(x+a-1) \approx \log_{0.268}(x+0.732)$$

以遞減函數  $y = \log_{0.268} x$  左移 0.732 單位可得

故選(2)。

4. (3)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：簡易對數值的計算

解析： $100^k < 12^{10}$  兩邊同取底數 10 的常用對數  $\Rightarrow \log 10^{2k} < \log 12^{10} \Rightarrow 2|k| < 10(2 \log 2 + \log 3)$

$$\Rightarrow |k| < 5 \times (2 \times 0.3010 + 0.4771) \Rightarrow |k| < 5.3955$$

$$\therefore k = \pm 5, \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0 \text{ 共 11 個}$$

故選(3)。

5. (4)

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：能確實明白重複組合的應用

解析：設甲分到  $2x+1$  個，乙分到  $2y+1$  個，丙分到  $2z+1$  個，其中  $x, y, z$  為非負整數，

依題意可得  $2x+1+2y+1+2z+1=13 \Rightarrow x+y+z=5$

$\therefore$  所求為  $H_5^3 = C_5^7 = C_2^7 = 21$

故選(4)。

## 二、多選題

6. (1)(3)(4)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：運用代數基本定理、勘根定理

解析：考慮  $f(x) = 3x^3 + 9x^2 + 4x - 1$

$x$	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	-	+	+	-	+

$\therefore f(-3) \cdot f(-2) < 0, f(-1) \cdot f(0) < 0$  且  $f(0) \cdot f(1) < 0$

由勘根定理得知，在  $-3 \sim -2$  之間， $-1 \sim 0$  之間和  $0 \sim 1$  之間必有實根

故選(1)(3)(4)。

7. (2)(3)(4)

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：解絕對值不等式

解析：(1)  $\times$ ：甲距離： $4 \times 6 = 24 > \frac{42.195}{2} = 21.0975$

(2)  $\circ$ ：乙距離： $6.5 \times 6 = 39 > 24$

(3)  $\circ$ ： $\therefore \frac{42.195}{6} = 7.0325$ ，則若有人跑完全程，其平均時速一定會大於 7.0325 公里 / 小時

(4)  $\circ$ (5)  $\times$ ：設丙的跑步距離為  $x$  公里，則  $|x-24| + |x-39| > \frac{1}{2} \times 42.195 = 21.0975$

①若  $x > 39$ ： $x-24+x-39 > 21.0975 \Rightarrow 2x > 84.0975$

$\therefore x > 42.04875$

②若  $24 < x \leq 39$ ： $x-24-(x-39) > 21.0975 \Rightarrow 15 > 21.0975$ (不合)

③若  $x \leq 24$ ： $-(x-24)-(x-39) > 21.0975 \Rightarrow -2x > -41.9025$

$\therefore x < 20.95125$

由①、②、③可得  $x > 42.04875$  或  $x < 20.95125$

故選(2)(3)(4)。

8. (1)(4)(5)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：插值多項式的應用

解析：設三次實係數多項式

$$g(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + 2x \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 4x \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 6x \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} \text{ 且 } a \neq 0,$$

$$\text{即 } g(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + f(x)$$

$\therefore f(x)$  通過  $(1, 2)$ 、 $(2, 4)$ 、 $(3, 6)$  三點，可得  $f(x) = 2x$

$$\therefore g(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + 2x$$

$$(1) \circ : f(4) = 8$$

$$(2) \times : g(4) = a(4-1)(4-2)(4-3) + 2x = 6a + 8 \neq 8 \quad (a \neq 0)$$

$$(3) \times : \therefore f(x) = 2x, \text{ 且 } g(0) = -6a \neq 0 \quad \therefore g(x) \text{ 不為 } f(x) \text{ 的倍式}$$

$$(4) \circ : \therefore g(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + 2x = (x-1)(x-2) [a(x-3)] + 2x$$

$\Rightarrow g(x)$  除以  $(x-1)(x-2)$  的餘式為  $f(x)$

$$(5) \circ : \therefore h(x) = g(x) - f(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) = 0 \text{ 且 } a \neq 0, \text{ 故有三個實根, } x=1, 2, 3$$

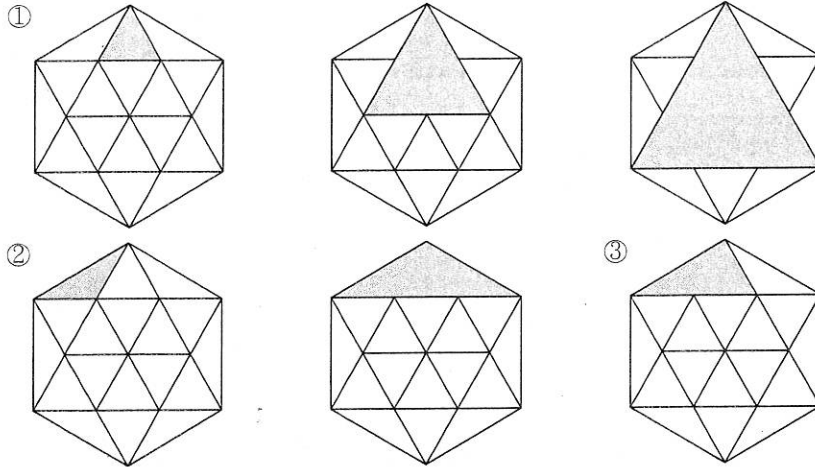
故選(1)(4)(5)。

9. (1)(2)(5)

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：計數原理推理

解析：如下圖，以最小的三角形面積為 1 單位，則所形成之三角形：



①正三角形的有：1 單位有 12 個，4 單位有 6 個，9 單位有 2 個

②等腰三角形的有：1 單位有 6 個，3 單位有 6 個

③任意三角形的有：2 單位有 12 個

可得  $a=6$ ， $N=12+6+2+6+6+12=44$

故選(1)(2)(5)。

10. (3)(4)

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：排列組合之基本概念

解析：(1)  $\times$ ： $(a+b)^{100}$  的展開式不同類項共有  $H_{100}^2 = C_{100}^{101} = C_1^{101} = 101$  項

(2)  $\times$ ： $\because A$  集合有  $n$  個元素  $\therefore A$  之部分集合共有  $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_n^n = 2^n$

(3)  $\circ$ ：若  $C_{12}^n = C_{18}^n$ ，則  $n=12+18=30$ ，故  $P_2^n = P_2^{30} = 30 \times 29 = 870$

(4)  $\circ$ ： $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{10} = \sum_{r=0}^{10} C_r^{10} (x^2)^{10-r} \left(\frac{-1}{x}\right)^r = \sum_{r=0}^{10} (-1)^r C_r^{10} \cdot x^{20-2r} \cdot x^{-r}$

常數項即  $x$  之次方為 0，則  $(20-2r)+(-r)=20-3r=0$

得  $r = \frac{20}{3}$  (不合)，故常數項為 0

(5)  $\times$ ： $\because$  兩點可唯一決定一直線  $\therefore$  五個相異點，可連成  $C_2^5 = 10$  條直線

故選(3)(4)。

11. (1)(4)(5)

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：判讀統計表、平均數、相關程度

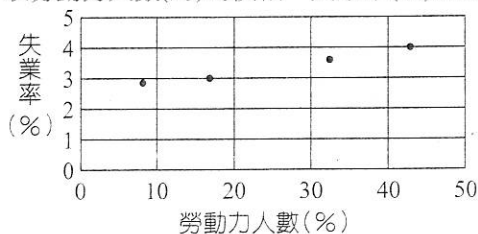
解析：(1)  $\circ$

(2)  $\times$ (3)  $\times$ (4)  $\circ$ ：教育程度在大學(專科)及以上的失業率為  $\frac{42.9\% \times 4.0\% + 8.1\% \times 2.9\%}{42.9\% + 8.1\%} = 3.8\%$

教育程度在高中(職)及以下的失業率為  $\frac{16.6\% \times 3.0\% + 32.4\% \times 3.6\%}{16.6\% + 32.4\%} = 3.4\%$

$\therefore$  大學(專科)及以上的失業率比高中(職)及以下的失業率高

(5)  $\circ$ ：以勞動力人數(%)為橫軸，失業率(%)為縱軸，作散佈圖如下



故選(1)(4)(5)。

12. (1)(2)(5)

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：線性變換對統計數值平均數、標準差、相關係數的影響

解析：(1) ○： $\mu_y = 4 \left( \frac{45-45}{5} \right) + 60 = 60$ (分)

(2) ○： $\sigma_y = \frac{4}{5} \sigma_x = \frac{4}{5} \times 5 = 4$ (分)

(3) ×：平均數為 60 分，並非中位數，無法確定有一半的學生達 60 分及格

(4) ×：調整後的標準差為 4，比調整前的標準差 5 小，資料更集中，每個同學成績間的差距變小  
 $\therefore$  更不容易看出每個同學成績間的差距

(5) ○：斜率  $\frac{4}{5} > 0$  的線性變換表示  $x, y$  為完全正相關

$\therefore r_{xy} = 1$

故選(1)(2)(5)。

第貳部分：選填題

A.  $-4 < a < 4$

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：多項式不等式及二次函數的恆正

解析： $\because (x+1)(x-3)(x^2+ax+4) < 0$  的解為  $-1 < x < 3$

$\therefore x^2+ax+4 > 0$  恆成立

$\therefore D = a^2 - 16 < 0 \Rightarrow -4 < a < 4$ 。

B. 5

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：運用獨立事件的性質求機率

解析： $P(\text{靶面至少命中 1 發的機率}) = 1 - P(\text{甲、乙、丙連續不中})$

$= 1 - (1-0.8)(1-0.5)(1-0.3)(1-0.8)(1-0.5)$

$= 0.993 > 0.99$

$\therefore$  至少要射擊 5 發。

C. 10

出處：第一冊第一章〈數與式〉、第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：數線上的幾何、二次函數的極值

解析： $\because |2x-a| \geq b \Leftrightarrow x \geq 6$  或  $x \leq -2$

$\Leftrightarrow |x-2| \geq 4$

$\Leftrightarrow |2x-4| \geq 8$

$\therefore a=4, b=8$

代入  $f(x) = -2x^2 + ax + b = -2x^2 + 4x + 8 = -2(x-1)^2 + 10$

$\therefore$  當  $x=1$  時， $f(x)$  有最大值 10。

D. (7, 16)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

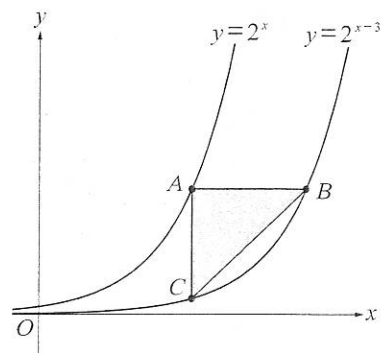
目標：指數函數的平移與指數方程式

解析：作略圖如右，可得  $\overline{AB} = 3$ ，又  $\triangle ABC$  的面積為 21  $\Rightarrow \overline{AC} = 14$

令  $A(k, 2^k), B(k+3, 2^k), C(k, 2^{k-3})$

則  $2^k - 2^{k-3} = 14 \Rightarrow 2^k \left( 1 - \frac{1}{8} \right) = 14 \Rightarrow 2^k = 16 \Rightarrow k = 4$

$\therefore B(7, 16)$ 。



E.  $\frac{199}{348}$

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：運用貝式定理求機率

解析：所求機率  $P = \frac{\frac{1}{150} \times \frac{99.5}{100}}{\frac{1}{150} \times \frac{99.5}{100} + \frac{149}{150} \times \frac{0.5}{100}} = \frac{199}{348}$ 。

F. 4

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：數列與對數的綜合運算

解析：原式即  $\frac{\log a_n}{\log(n+1)} = 1 + \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}$

$$\text{左右同乘 } \log(n+1) \Rightarrow \log a_n = \log(n+1) + \frac{1}{n+1} = \log \left[ (n+1)10^{\frac{1}{n+1}} \right]$$

$$\therefore a_n = (n+1) \times 10^{\frac{1}{n+1}} \Rightarrow \frac{a_n}{n+1} = 10^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\text{又 } \frac{a_n}{n+1} = 10^{\frac{1}{n+1}} < 1.6 = \frac{16}{10}, \text{ 兩邊同取 } \log \Rightarrow \frac{1}{n+1} < 4 \log 2 - 1 \approx 0.204 \Rightarrow n > \frac{1}{0.204} - 1 \approx 3.902$$

$$\therefore n \in N \quad \therefore n \geq 4$$

故所求自然數  $n$  最小值為 4。

G. 9.6

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：對數的計算

解析：設 1 顆原子彈釋放的能量為  $E$ ，而此小行星釋放能量相當於芮氏規模  $M_A$

$$\text{則 } \begin{cases} \log E = 4.8 + 1.5 \times 6.2 \\ \log 114000E = 4.8 + 1.5 \times M_A \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{兩式相減} &\Rightarrow \log 1.14 \times 10^5 \times E - \log E = 1.5M_A - 1.5 \times 6.2 \\ &\Rightarrow \log 1.14 + \log 10^5 + \log E - \log E = 1.5(M_A - 6.2) \\ &\Rightarrow 0.057 + 5 = 1.5(M_A - 6.2) \\ &\Rightarrow M_A \approx 9.57 \approx 9.6 \end{aligned}$$

故相當於芮氏規模 9.6 的地震。

H.  $\frac{5}{26}$

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：條件機率

解析：設  $A$  代表薪資多於 50 千元的事件， $B$  代表小強從事運輸及倉儲業的事件

$$\text{故所求機率為 } P(B|A) = \frac{30}{37+27+39+23+30} = \frac{30}{156} = \frac{5}{26}。$$