108 年學科能力測驗第二次模擬考試

數學考科解析

108-W2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(4)	(1)	(1)	(2)	(3)	(5)	(3)(5)	(2)(5)	(2)(4)	(2)(3)(5)	(3)(4)	(3)(4)(5)	(1)(5)	3	1
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
4	1	1	3	6	2	2	5	1	2	8	6	6	9	1
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42			
2	0	7	8	3	9	5	6	1	2	7	5			

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (4) 【難易度】★☆☆

【出處】第二冊 第一章 數列與級數

【解析】已知$p_1=1$，$p_2=\dfrac{-1}{\frac{1}{2}+1}=\dfrac{-2}{3}$，$p_3=\dfrac{-(\frac{-2}{3})}{\frac{(\frac{-2}{3})}{2}+1}=\dfrac{(\frac{2}{3})}{(\frac{2}{3})}=1$，

$p_4=\dfrac{-1}{\frac{1}{2}+1}=\dfrac{-2}{3}$，$p_5=\dfrac{-(\frac{-2}{3})}{\frac{(\frac{-2}{3})}{2}+1}=\dfrac{(\frac{2}{3})}{(\frac{2}{3})}=1$，……

可知每兩個為一循環，$p_{2n}=\dfrac{-2}{3}$，$p_{2n+1}=1$，$n\geq 1$

$\Rightarrow p_{2020}=\dfrac{-2}{3}$，$p_{2021}=1 \Rightarrow p_{2021}-p_{2020}=1-(\dfrac{-2}{3})=\dfrac{5}{3}$ 故選(4)

2. (1) 【難易度】★☆☆

【出處】第二冊 第四章 數據分析

【解析】參加這次益智問答電視節目的全體觀眾的平均成績
=[各題答對得分×答對率]之加總−[各題答錯扣分×答錯率]之加總

$=(25\cdot 0.6+25\cdot \dfrac{k}{100}+25\cdot 0.9+25\cdot 0.5)$

$-[7\cdot 0.4+7\cdot (\dfrac{100-k}{100})+7\cdot 0.1+7\cdot 0.5]$

$=(25\cdot 2-7\cdot 2)+(25\cdot \dfrac{k}{100}+7\cdot \dfrac{k}{100})=36+\dfrac{32k}{100}=60$

$\Rightarrow \dfrac{8k}{25}=24 \Rightarrow k=75$ 故選(1)

3. (1) 【難易度】★☆☆

【出處】第二冊 第四章 數據分析

【解析】該城市的平均經濟成長率為

$\sqrt[4]{(1+0.5)\times(1+0.5)\times(1+0.92)\times(1+1.43)}-1$

$=\sqrt[4]{1.5\times 1.5\times 1.92\times 2.43}-1$

$=\sqrt[4]{\dfrac{150}{100}\times\dfrac{150}{100}\times\dfrac{192}{100}\times\dfrac{243}{100}}-1$

$=\sqrt[4]{\dfrac{2^8\cdot 3^8\cdot 5^4}{100^4}}-1=\dfrac{2^2\cdot 3^2\cdot 5}{100}-1=\dfrac{180}{100}-1=\dfrac{80}{100}=80\ \%$

因此經濟成長率為 80 % 故選(1)

4. (2) 【難易度】★★☆

【出處】第二冊 第三章 機率

【解析】因為此袋中總共有 $5+6+8=19$ 個水晶球，
所以n(樣本空間 S)$=n$(百寶箱中隨機一次抽出 2 球)

$=C^{19}_2=\dfrac{19\cdot 18}{1\cdot 2}=171$

而P(抽 2 球所變金額<100)
$=P$(1 個紅水晶球+1 個黃水晶球：60 元)$+P$(2 個黃水晶球：20 元)

$=\dfrac{C^6_1\cdot C^8_1}{C^{19}_2}+\dfrac{C^8_2}{C^{19}_2}=\dfrac{6\times 8}{171}+\dfrac{\frac{8\times 7}{1\times 2}}{171}=\dfrac{48}{171}+\dfrac{28}{171}=\dfrac{76}{171}$ 故選(2)

5. (3) 【難易度】★★☆

【出處】第二冊 第二章 排列、組合

【解析】假設展場空間擺放 ALTIS、CR-V、SIENTA、YARIS 和 HR-V 等五種車款分別有 a，b，c，d，e 臺，且皆為奇數臺。
因為每種車款至少 3 臺，$a\geq 3$，$b\geq 3$，$c\geq 3$，$d\geq 3$，$e\geq 3$
所以$a+b+c+d+e=31$，其中$a=(2a'+3)$，$b=(2b'+3)$，$c=(2c'+3)$，$d=(2d'+3)$，$e=(2e'+3)$
$\Rightarrow (2a'+3)+(2b'+3)+(2c'+3)+(2d'+3)+(2e'+3)=31$
其中a'，b'，c'，d'，e'皆為非負整數
$\Rightarrow 2(a'+b'+c'+d'+e')=16 \Rightarrow a'+b'+c'+d'+e'=8$
其中a'，b'，c'，d'，e'皆為非負整數

$\Rightarrow$ 可推得其整數解有 $\Rightarrow H^5_8=C^{12}_8=C^{12}_4=\dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=495$ 組

故選(3)

6. (5) 【難易度】★★★

【出處】第二冊 第一章 數列與級數

【解析】所求$=1.01^3+1.02^3+1.03^3+\cdots\cdots+1.20^3$

$=(\dfrac{101}{100})^3+(\dfrac{102}{100})^3+(\dfrac{103}{100})^3+\cdots\cdots+(\dfrac{120}{100})^3$

$=\dfrac{1}{10^6}(101^3+102^3+103^3+\cdots\cdots+120^3)$

$=\dfrac{1}{10^6}[(1^3+2^3+\cdots\cdots+120^3)-(1^3+2^3+\cdots\cdots+100^3)]$

$=\dfrac{1}{10^6}[(\dfrac{120\times 121}{2})^2-(\dfrac{100\times 101}{2})^2]$

$=\dfrac{1}{10^4}[(\dfrac{12\times 121}{2})^2-(\dfrac{10\times 101}{2})^2]$

$=\dfrac{1}{10^4}[(6\times 121)^2-(5\times 101)^2]$

$=\dfrac{1}{10^4}[(726+505)(726-505)]=\dfrac{1}{10^4}(1231)(221)$

$=\dfrac{1}{10^4}(272051)=27.2051\approx 27.21$ 故選(5)

二、多選題

7. (3)(5) 【難易度】★☆☆

【出處】第二冊 第四章 數據分析

【解析】因為依照圖形資料分散程度判斷可推得：

①$r_2>r_1>0$（圖形 2 為直線完全正相關 $\Rightarrow$ $r_2=1$，圖形 1 較分散，但仍為正相關 $\Rightarrow$ $1>r_1>0$）

②$r_5=0$（圖形 5 左右成對稱狀態，兩變量為零相關）

③$0>r_4>r_3$（圖形 3 為直線完全負相關，$r_3=-1$；圖形 4 較分散，但仍為負相關 $\Rightarrow$ $0>r_4>-1$）

所以$r_2>r_1>r_5>r_4>r_3$ 故選(3)(5)

8. (2)(5) 【難易度】★★☆

【出處】第二冊 第一章 數列與級數；第四章 數據分析

【解析】(1)× 因為公差 t 為正實數，所以$h_1<h_2<h_3<\cdots\cdots$
$\Rightarrow h_1-0.6<h_2-0.6<h_3-0.6<\cdots\cdots$，即$j_1<j_2<j_3<\cdots\cdots$

(2)○ 因為公差 t 為正實數，所以$h_1<h_2<h_3<\cdots\cdots$
$\Rightarrow -0.6h_1>-0.6h_2>-0.6h_3>\cdots\cdots$，即$k_1>k_2>k_3>\cdots\cdots$

(3)× 假設$\langle h_n\rangle$：-7，-5，-3，-1，……，
則$\langle l_n\rangle$：55，31，15，7，……，即$l_1>l_2>l_3>\cdots\cdots$

(4)× 假設$\langle h_n\rangle$：-2，0，2，4，……，是公差為 2 的等差數列
而$\langle m_n\rangle$：-2，-2，-2，-2，……，是公差為 0 的等差數列

(5)○ 因為$p_n=3h_n+2020$，所以$\sigma_p=3\sigma_h=\sigma \Rightarrow \sigma_h=\dfrac{\sigma}{3}$

故選(2)(5)

9. (2)(4) 【難易度】★★☆

【出處】第二冊 第二章 排列、組合

【解析】(1)× 先平分成分堆，再分給 3 人（每人 4 個）
$\Rightarrow \dfrac{C^{12}_4 C^8_4 C^4_4}{3!}\times 3!=C^{12}_4 C^8_4$

(2)○ 直接指定分給小惠 6 個，小英 3 個，小喬 3 個：
$C^{12}_6 C^6_3 C^3_3=C^{12}_6 C^6_3$

(3)× 先從 12 種蛋糕選 2 種分給小惠，再從剩下的 10 種不同蛋糕任意分給其他 2 人的分法有 $C^{12}_2\cdot 2^{10}=66\cdot 2^{10}$ 種

(4)○ 先從 12 種蛋糕全部任意分給 3 人，再扣除小英不拿及小英拿一種的分法有 $3^{12}-2^{12}-C^{12}_1 2^{11}=3^{12}-2^{12}-6\cdot 2^{12}$
$=3^{12}-7\cdot 2^{12}$ 種

(5)× 先從 12 種蛋糕全部任意分給 3 人，然後分別扣除小英不拿及扣除小喬不拿，最後再加回小英及小喬同時不拿的分法有 $3^{12}-2^{12}-2^{12}+1^{12}=3^{12}-8191$ 種

故選(2)(4)

10. (2)(3)(5) 【難易度】★★☆

【出處】第二冊 第三章 機率

【解析】(1)× 開票第一張取到圈選「劉邦」選票的機率為
$\dfrac{C^9_1}{C^{18}_1}=\dfrac{9}{18}=\dfrac{1}{2}$

(2)○ 開票第二張取到圈選「劉邦」選票的機率為

$\dfrac{9}{18}\cdot\dfrac{8}{17}+\dfrac{8}{18}\cdot\dfrac{9}{17}+\dfrac{1}{18}\cdot\dfrac{9}{17}$
$=\dfrac{153}{306}=\dfrac{1}{2}$

第一次	第二次
「劉邦」	「劉邦」
「項羽」	「劉邦」
廢票	「劉邦」

(3)○ P(第一張「項羽」|第二張「劉邦」)
$=\dfrac{P(\text{第一張項羽}\cap\text{第二張劉邦})}{P(\text{第二張劉邦})}$
$=\dfrac{\frac{8}{18}\cdot\frac{9}{17}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{72}{306}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{72}{153}=\dfrac{8}{17}$

(4)× P(第一張「無效票」|第二張「劉邦」)

$=\dfrac{P(\text{第一張無效票}\cap\text{第二張劉邦})}{P(\text{第二張劉邦})}=\dfrac{\frac{1}{18}\cdot\frac{9}{17}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{1}{34}}{\frac{1}{2}}$

$=\dfrac{1}{17}$

(5)○ P(第三張「項羽」|第一、二張「劉邦」)

$=\dfrac{P(\text{第三張項羽}\cap\text{第一、二張劉邦})}{P(\text{第一、二張劉邦})}=\dfrac{\frac{9}{18}\cdot\frac{8}{17}\cdot\frac{8}{16}}{\frac{9}{18}\cdot\frac{8}{17}}$

$=\dfrac{1}{2}$

故選(2)(3)(5)

11. (3)(4) 【難易度】★★☆

【出處】第二冊 第二章 排列、組合

【解析】假設一般項為 $C^7_r(kx)^{7-r}(\frac{1}{x^3})^r=(C^7_r k^{7-r})\cdot x^{7-4r}$

(1)× 令 $7-4r=-1\Rightarrow r=2\Rightarrow C^7_2k^{7-2}=-672\Rightarrow 21k^5=-672$

$\Rightarrow k^5=-32\Rightarrow k=-2$

(2)× 令 $7-4r=1\Rightarrow r=\frac{3}{2}\Rightarrow$ 無此項 $x\Rightarrow x$ 項係數為 0

(3)○ 令 $7-4r=3\Rightarrow r=1\Rightarrow C^7_1(-2)^{7-1}=7\cdot 64=448$

(4)○ 令 $7-4r=-5\Rightarrow r=3\Rightarrow C^7_3(-2)^{7-3}=35\cdot 16=560$

(5)× 令 $7-4r=0\Rightarrow r=\frac{7}{4}\Rightarrow$ 無此項 (x^0) 常數項

$\Rightarrow$ 常數項係數為 0

故選(3)(4)

12. (3)(4)(5) 【難易度】★★★

【出處】第二冊 第二章 排列、組合

【解析】假設口中雞塊個數是 3 個的有 x 次，雞塊個數是 4 個的有 y 次

因為大綸最後有拿到獎金，所以他有在限時內吃完 32 個雞塊 $\Rightarrow 3x+4y=32$

x	0	4	8
y	8	5	2

(1)× 令 $x=0$，$y=8$ 次

即大綸每次口中雞塊個數都是 4 個，所以比賽過程中的分配情形有 $\frac{8!}{0!\,8!}=1$ 種

(2)× 令 $x=8$，$y=2$ 次

即雞塊個數是 3 個的有 8 次，雞塊個數是 4 個的有 2 次，所以分配情形有 $\frac{10!}{8!\,2!}=45$ 種

(3)○ 令 $x=4$，$y=5$ 次

即雞塊個數是 3 個的有 4 次，雞塊個數是 4 個的有 5 次，所以分配情形有 $\frac{9!}{4!\,5!}=126$ 種

(4)○ 若大綸的「比賽策略」不變，則比賽過程中所有的分配情形共有 $1+45+126=172$ 種

(5)○ 因為大綸的「比賽策略」不變，且累積吃到第 20 塊時必須喝水喘息，然後再完成剩下的 12 塊

①所以先算第一階段：

$3x+4y=20\Rightarrow\frac{5!}{0!\,5!}+\frac{6!}{4!\,2!}=16$

x	0	4
y	5	2

②接著再算第二階段：

$3x+4y=12\Rightarrow\frac{4!}{4!\,0!}+\frac{3!}{0!\,3!}=2$

x	4	0
y	0	3

③最後利用乘法原理將兩階段方法數相乘：$16\cdot 2=32$

故選(3)(4)(5)

13. (1)(5) 【難易度】★★★

【出處】第二冊 第一章 數列與級數

【解析】(1)○ $p_5=2+(3+4+5+6)=20$

(2)× 因為 $p_2=p_1+3$，$p_3=p_2+4$，$p_4=p_3+5$，……

$\Rightarrow p_8=a_7+(8+1)=a_7+9$

所以接著進行遞迴式的分項對消如下：

$$\begin{aligned}
p_1=2,\ \cancel{p_2}&=p_1+3\\
\cancel{p_3}&=\cancel{p_2}+4\\
\cancel{p_4}&=\cancel{p_3}+5\\
&\ \vdots\\
&\ \vdots\\
\cancel{p_{n-1}}&=\cancel{p_{n-2}}+n\\
+)\quad p_n&=\cancel{p_{n-1}}+(n+1),\ n\ge 2\\
\hline
p_n&=p_1+[3+4+5+\cdots\cdots+(n+1)]\\
&=2+3+4+5+\cdots\cdots+(n+1)\\
&=\frac{[2+(n+1)]\cdot n}{2}=\frac{n(n+3)}{2}
\end{aligned}$$

(3)× $p_n=p_{n-1}+(n+1)$

(4)× $p_n=\frac{n(n+3)}{2}=\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{2}$

(5)○ $p_{98}=\frac{98(98+3)}{2}=4949$

故選(1)(5)

第貳部分：選填題

A. $\frac{3}{14}$ 【難易度】★☆☆

【出處】第二冊 第三章 機率

【解析】(1)因為 $P(M\cap N)=P(M)\cdot P(N)\Rightarrow\frac{1}{14}=\frac{1}{4}\cdot P(N)\Rightarrow P(N)=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$

(2)所以 $P(N\cap M')=P(N)-P(M\cap N)=\frac{2}{7}-\frac{1}{14}=\frac{3}{14}$

B. $1136\sqrt{2}$ 【難易度】★★☆

【出處】第二冊 第一章 數列與級數

【解析】$\because\dfrac{\sum_{k=5}^{32}a_k}{\sum_{k=1}^{28}a_k}=\dfrac{ar^4+ar^6+\cdots\cdots+ar^{31}}{a+ar+\cdots\cdots+ar^{27}}=\dfrac{\frac{ar^4(r^{28}-1)}{r-1}}{\frac{a(r^{28}-1)}{r-1}}=r^4$

$\Rightarrow r^4=\frac{568}{142}=4\Rightarrow r=\sqrt{2}$（取正）

$\Rightarrow\sum_{k=8}^{35}a_k=ar^7+ar^8+\cdots\cdots+ar^{34}=\frac{ar^7(r^{28}-1)}{r-1}=r^3\cdot[\frac{ar^4(r^{28}-1)}{r-1}]$

$=(\sqrt{2})^3\cdot 568=1136\sqrt{2}$

C. $\frac{251}{286}$ 【難易度】★★☆

【出處】第二冊 第二章 排列、組合

【解析】(1)樣本空間機率的分母 $n(S)=C^{13}_3=\frac{13\times12\times11}{1\times2\times3}=286$

(2)因為乘積為偶數的情形共有三種：

三顆球編號分別為 2 奇數 1 偶數或 1 奇數 2 偶數或 3 偶數

而且 1～13 中，奇數有 7 個，偶數有 6 個

所以編號乘積為偶數的取法共有 $C^7_2\times C^6_1+C^7_1\times C^6_2+C^6_3$

$=\frac{7\times6}{1\times2}\times6+7\times\frac{6\times5}{1\times2}+\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=251$ 種

(3)所求 P(編號之乘積為偶數)$=\frac{n(\text{編號乘積為偶數})}{n(S)}=\frac{251}{286}$

$\boxed{\text{另解}}$：P(編號之乘積為偶數)$=1-\frac{n(\text{編號乘積為奇數})}{n(S)}$

$=1-\frac{n(3\text{ 球編號皆為奇數})}{n(S)}=1-\frac{C^7_3}{286}=1-\frac{35}{286}=\frac{251}{286}$

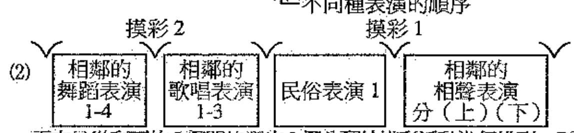
D. 69120 【難易度】★★☆

【出處】第二冊 第二章 排列、組合

【解析】(1)先排相鄰的舞蹈表演 1-4、相鄰的歌唱表演 1-3、民俗表演 1、相鄰的相聲表演分（上）（下），可得直線排列4!。其中相鄰的舞蹈表演可對調再乘4!、相鄰的歌唱表演可對調再乘3!、相鄰的相聲表演分（上）（下）再乘 $\frac{2!}{2!}$（因為順序不變視為同物排列）$\Rightarrow \underline{4!}\cdot 4!\cdot 3!\cdot 1=3456$

不同種表演的順序

(2)



再來是從剩下的5個間格選出2個分配給摸彩活動進行排列：P^5_2

(3)根據上述(1)、(2)及乘法原理可推得：$3456\cdot P^5_2=69120$

E. 78 【難易度】★★☆

【出處】第二冊 第四章 數據分析

【解析】因為變量 $Q=\frac{6\times(P-2\mu_P)}{\sigma_P}+132$

所以算術平均數 $\mu_Q=\frac{6\times(\mu_P-2\mu_P)}{\sigma_P}+132$

$=\frac{6\times(55-2\cdot55)}{5}+132=\frac{6\times(-55)}{5}+132=66$

標準差 $\sigma_Q=|\frac{6}{5}|\cdot\sigma_P=6\Rightarrow\mu_Q+2\sigma_Q=66+12=78$

F. $\frac{39}{56}$ 【難易度】★★☆

【出處】第二冊 第三章 機率

【解析】(1)P(有獲得 BTS 的簽名 T 恤)

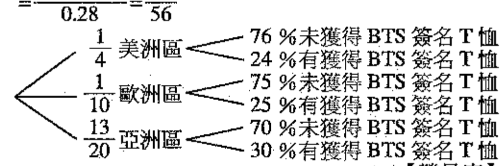
$=\frac{1}{4}\times0.24+\frac{1}{10}\times0.25+\frac{13}{20}\times0.30=0.28$

(2)已知有一件 T 恤是 BTS 在 2018 的簽名紀念品，試求此簽名 T 恤來自亞洲區的機率為

P(來自亞洲區粉絲轉售|有獲得 BTS 簽名 T 恤)

$=\frac{P(\text{有獲得 BTS 簽名 T 恤 且 來自亞洲區粉絲轉售})}{P(\text{有獲得 BTS 簽名 T 恤})}$

$=\dfrac{\frac{13}{20}\times0.30}{0.28}=\frac{39}{56}$



G. 1275 【難易度】★★★

【出處】第二冊 第四章 數據分析

【解析】(1)因為 $x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_{21}=\sum_{i=1}^{21}x_i=105$，$y_1+y_2+y_3+\cdots\cdots+y_{21}$

$=\sum_{i=1}^{21}y_i=147$，所以 $\mu_X=\frac{1}{21}\sum_{i=1}^{30}x_i=\frac{105}{21}=5$，$\mu_Y=\frac{1}{21}\sum_{i=1}^{21}y_i=\frac{147}{21}=7$

(2)又 x_i，$i=1$，2，3，……，21 的標準差 $\sigma_X=\sqrt{\frac{1}{21}\sum_{i=1}^{21}x_i^2-\mu_X^2}=6$

$\Rightarrow\sum_{i=1}^{21}x_i^2=21(\mu_X^2+6^2)=21(5^2+6^2)=1281$

(3)所以 y 對 x 的迴歸直線斜率

$m=\dfrac{\sum_{i=1}^{21}x_iy_i-21\mu_x\mu_y}{\sum_{i=1}^{21}x_i^2-21(\mu_x)^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{21}x_iy_i-21\cdot5\cdot7}{1281-21\cdot(5)^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{21}x_iy_i-735}{756}=\frac{5}{7}$

$\Rightarrow 7\cdot\sum_{i=1}^{21}x_iy_i-5145=3780\Rightarrow\sum_{i=1}^{21}x_iy_i=1275$

即所求 $x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+\cdots\cdots+x_{21}y_{21}=1275$