109 學年度全國高級中學第二次學科能力測驗(109-E2)

第壹部分：選擇題（占 65 分）

RA283

一、單選題（占 30 分）

1. 數線上絕對值不等式$|x+\frac{1}{2}|\le 1\le |x|$的解為一線段，則此線段的長度為？

   (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) 1 (5) $\frac{3}{2}$

2. 設a_1,a_2,a_3,a_4為非零實數形成的等比數列。若方程式$a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$有 m 個實根，n 個虛根，請選出正確的選項。

   (1) $(m,n)=(3,0)$ (2) $(m,n)=(2,1)$ (3) $(m,n)=(1,2)$ (4) $(m,n)=(0,3)$
   (5) 條件不足，無法判定 m，n 之值

3. 已知二次函數$y=f(x)$滿足$f(1)=2$，$f(3)=8$，且當$1\le x\le 3$時，$f(x)$有最小值 m 與最大值 M，則數對(m,M)不可能為下列何者？

   (1) (2, 8) (2) (1, 8) (3) (2, 10) (4) (2, 1000) (5) (1, 10)

4. 設等差數列$\langle a_n\rangle$與$\langle b_n\rangle$的前 n 項和分別為S_n與T_n（$n\ge 1$，n 為正整數），已知$\frac{S_n}{T_n}=\frac{7n+45}{n+3}$，則使$\frac{a_n}{b_n}$為整數的正整數 n 的個數有幾個？

   (1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 5 個

5. 投擲一顆公正骰子兩次， 其結果以(x_1,x_2)表示，其中x_1、x_2分別表示第一、二次骰子的點數。設事件$A=\{(x_1,x_2)|4\le x_1+x_2\le 6\}$，則當事件 B 為下列何者時，A 與 B 不為獨立事件？

   (1) $B=\{(x_1,x_2)|x_1>x_2\}$ (2) $B=\{(x_1,x_2)|x_1\ge x_2\}$ (3) $B=\{(x_1,x_2)|x_1\ne x_2\}$
   (4) $B=\{(x_1,x_2)|x_1-x_2=1\}$ (5) $B=\{(x_1,x_2)|x_1-x_2<1\}$

6. 設實數 x，y 滿足$4^x+4^y=2^{x+1}+2^{y+1}$，則下列關於2^x+2^y極值的敘述何者正確？

   (1) 2^x+2^y有最大值 4 及最小值 0 (2) 2^x+2^y有最大值 4，但沒有最小值
   (3) 2^x+2^y有最大值 2 及最小值 1 (4) 2^x+2^y有最大值 2，但沒有最小值
   (5) 2^x+2^y沒有最大值，但有最小值 0

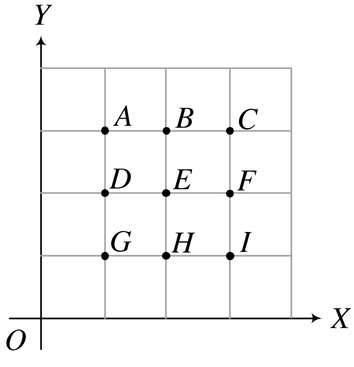
二、多選題（占 35 分）

7. 設 a，b，k 為實數，已知多項式$f(x)=2x^3+6x^2+3x+k=2(x+a)^3-b(x+a)-4$，請選出正確的選項。

   (1) $a=1$ (2) $b=-3$ (3) $k=5$ (4) $f(-0.99)\ge -4.03$ (5) $f(\sqrt{2}-1)<-2$

8. 右圖為有 A，B，C，D，E，F，G，H，I，共九個資料點的散布圖，其 X 與 Y 的相關係數為 0。試問去掉哪個選項中的點後，剩餘 8 個資料點的相關係數依然為 0？

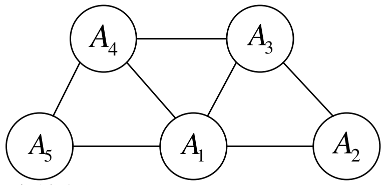
   (1) A (2) B (3) E (4) G (5) H



9. 已知$A=\sqrt{4+\sqrt{7}}$，$B=\sqrt{4-\sqrt{7}}$，請選出正確的選項。

   (1)$AB=1$ (2)$A^2+B^2=8$ (3)$0<A-B<1$ (4)$16<A^3-B^3<17$ (5)$18<A^3+B^3<19$

10. 用x種顏色($x \ge 3$)去塗右圖所示的各個頂點區域$A_1 \sim A_5$，滿足每個區域恰用1色且相鄰區域塗不同色(這裡的相鄰是指兩區域間有線段相連，例如：A_1與A_5是相鄰，A_2與A_4則為不相鄰)，設共有$f(x)$種不同的塗法，請選出正確的選項。



(1) $f(3)=6$ (2) $f(x)$為x的5次多項式

(3) $f(x)$除以$x^2-6x+12$的餘式為96

(4) 方程式$f(x^3)=0$的根均為實數

(5) 不等式$(x-1)f(x)<0$的解為$0<x<2$

11. 已知$\log x \approx 4.7$ (四捨五入至小數點後第一位)，請選出正確的選項。

(1) x的整數部分為一個五位數 (2) x整數部分的最高位數字為5

(3) $\sqrt{x}$的整數部分為一個三位數 (4) $\sqrt{x}$整數部分的最高位數字為2

(5) $\sqrt{x}+x$整數部分的最高位數字可能為6

12. 已知集合$M=\{x \mid 1 \le x \le 10,\ x$為正整數$\}$，$A$是集合$M$的非空子集合，我們把集合$A$中的元素個數記為$n(A)$，各元素之和記為$\Sigma(A)$，例如：若$A=\{2,4,7,8\}$，則$n(A)=4$，$\Sigma(A)=2+4+7+8=21$；若$A=\{9\}$，則$n(A)=1$，$\Sigma(A)=9$。請選出正確的選項。

(1) 若$n(A)$=5，則$\Sigma(A)<40$ (2) 若$n(A)$=4，則$\Sigma(A)>10$

(3) 若$n(A)$=3，則$\Sigma(A)$共有22種可能的值

(4) 若$\Sigma(A)=10$且$n(A)$=2，則有5種不同的集合A

(5) 若$\Sigma(A)=10$，則有10種不同的集合A

13. 已知$6^x=3$，$\log_9 6=y$，請選出正確的選項。

(1) $x+y>1$ (2) $x \cdot y<\dfrac{1}{2}$ (3) $x>y$ (4) $\dfrac{x+1}{2y+1}=\log_6 3$ (5) $2^{1-xy}=3^{y-xy}$

第貳部分：選填題（占 35 分）

A. 設複數$z=a+bi$ (其中a，b均為實數)滿足$z+\bar{z}=4$且$z-\bar{z}=-2i$，其中$i=\sqrt{-1}$，$\bar{z}$表示z的共軛複數，則a=________，b=_______。

B. 一數列$\langle a_n \rangle$共有101項，滿足遞迴關係$\begin{cases} a_1=2 \\ a_{n+1}=na_n+1, n=1,2,\ldots\ldots,100 \end{cases}$，則此數列共有________項為偶數。

C. 自正整數組成的一組數據x_1,x_2,x_3,x_4，其平均數和中位數均為2，且標準差不小於1，則${x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+{x_4}^2=$_______。

D. 設k為非零實數，若$(x+ky)^5$展開式中x^2y^3的係數為$(kx+y)^5$展開式中x^2y^3之係數的3倍，則$(x+ky)^5+(kx+y)^5$中xy^4的係數為_______。

E. 袋中有三顆相同的球，三球分別標上1分、2分與-1分。自袋中取球4次，每次取一球，若每球被取到的機會相同，且記錄分數後就將球放回袋中。已知小莉4次取球的分數總和恰為4分，則其4次取球均無負分的條件機率為_______。(化為最簡分數)

F. 某班於一次的期中考試，導師計算出物理成績對數學成績的迴歸直線斜率為m($m \neq 0$)，物理成績的平均為μ。後來因為每個人的物理成績都未超過60分，所以導師決定以線性函數調整成績：原始物理成績x分的學生，新的物理成績調整為$ax+b$分($a \neq 0$)。導師重新計算出調分後物理成績對數學成績的迴歸直線斜率為m'，物理成績的平均為μ'。若$m'=\frac{3}{2}m$，$\mu=40$，$\mu'=70$，則數對(a, b)=__________。(化為最簡分數)

G. 設a為正實數，若函數$f(x)=|x+1|+|x-a|$的圖形與水平線$y=\frac{5}{2}$所圍成的四邊形面積為2，則a之值為______。(化為最簡分數）

RA283　109 學年度全國高級中學第二次學科能力測驗**(109-E2)**

參考答案

選擇題：1. (1)　**2.** (3)　**3.** (5)　**4.** (5)　**5.** (4)　**6.** (2)　**7.** (1)(4)(5)　**8.** (2)(3)(5)　**9.** (2)(5)
10. (1)(2)　**11.** (1)(3)(4)　**12.** (3)(5)　**13.** (1)(4)(5)

選填題：A. 2；-1　**B.** 50　**C.** 20　**D.** 420　**E.** $\frac{1}{13}$　**F.** $(\frac{3}{2},10)$　**G.** $\frac{1}{2}$