數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
答案	(1)	(3)	(5)	(5)	(4)	(2)	(1)(4)(5)	(2)(3)(5)	(2)(5)
題號	10.	11.	12.	13.					
答案	(1)(2)	(1)(3)(4)	(3)(5)	(1)(4)(5)					

第壹部分：選擇題

一、單選題

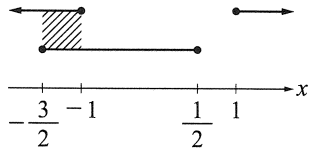
1. (1)

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：基本絕對值不等式

解析：$\left|x+\dfrac{1}{2}\right|\leq 1 \Rightarrow -1\leq x+\dfrac{1}{2}\leq 1$

$\Rightarrow -\dfrac{3}{2}\leq x\leq \dfrac{1}{2}$



$1\leq |x| \Rightarrow x\geq 1$ 或 $x\leq -1$

$\therefore -\dfrac{3}{2}\leq x\leq -1$

所求為 $(-1)-\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$

故選(1)。

2. (3)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：等比數列的基本概念、能解 3 次方以上的多項式方程式

解析：令 $a_1=a$

$a_2=ar$

$a_3=ar^2$

$a_4=ar^3$

則 $ax^3+arx^2+ar^2x+ar^3=0$

$\Rightarrow x^3+rx^2+r^2x+r^3=0$

$\Rightarrow (x+r)(x^2+r^2)=0$

$\Rightarrow x=-r$ 或 $x^2=-r^2$

$\Rightarrow x=-r$ 或 $x=\pm\sqrt{-r^2}=\pm|r|\cdot i$

$\therefore$方程式有 1 個實根，2 個虛根

故選(3)。

3. (5)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：二次函數在變數有範圍時的極值處理

解析：$f(1)=2 \Rightarrow$ 過$(1,2)$，$f(3)=8 \Rightarrow$ 過 $(3,8)$

①頂點 x 坐標≤ 1，如圖㈠

$m=2$，$M=8$

②頂點 x 坐標≥ 3，如圖㈡

$m=2$，$M=8$

③ $1<$頂點 x 坐標<3，開口向下，如圖㈢

則當 $k=10$ 時，$m=2$，$M=10$

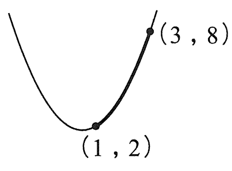
當 $k=1000$ 時，$m=2$，$M=1000$

④ $1<$頂點 x 坐標<3，開口向上，如圖㈣

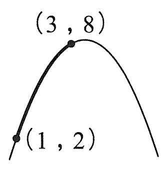
則當 $k=1$ 時，$m=1$，$M=8$

綜合以上，m、M 必至少有 1 個為 2 或 8

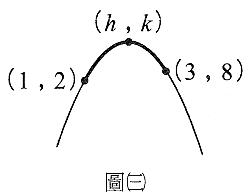
故選(5)。



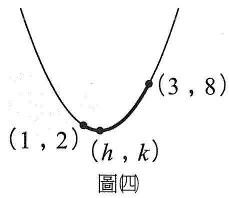
圖㈠



圖㈡



圖㈢



圖㈣

4. (5)

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：等差級數總和公式的應用

解析：$\frac{a_n}{b_n}=\frac{(2(n-1)+1)\cdot a_n}{(2(n-1)+1)\cdot b_n}=\frac{(2n-1)\cdot a_n}{(2n-1)\cdot b_n}=\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\frac{7(2n-1)+45}{(2n-1)+3}=\frac{14n+38}{2n+2}=\frac{7n+19}{n+1}=7+\frac{12}{n+1}\in Z$

$\Rightarrow n+1\mid 12\Rightarrow n=1$，2，3，5，11，共 5 個

故選(5)。

5. (4)

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：獨立事件的判斷

解析：$x_1+x_2=4$：$(1,3)$，$(2,2)$，$(3,1)$

$x_1+x_2=5$：$(1,4)$，$(2,3)$，$(3,2)$，$(4,1)$

$x_1+x_2=6$：$(1,5)$，$(2,4)$，$(3,3)$，$(4,2)$，$(5,1)$

$P(A)=\frac{3+4+5}{6^2}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

(1) $P(B)=\frac{C^6_2}{6^2}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$，$P(A\cap B)=\frac{1+2+2}{6^2}=\frac{5}{36}$

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

(2) $P(B)=\frac{C^6_2+6}{6^2}=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$，$P(A\cap B)=\frac{2+2+3}{6^2}=\frac{7}{36}$

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

(3) $P(B)=\frac{6^2-6}{6^2}=\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$，$P(A\cap B)=\frac{2+4+4}{6^2}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

(4) $B=\{(2,1),(3,2),(4,3),(5,4),(6,5)\}$

$P(B)=\frac{5}{6^2}=\frac{5}{36}$，$P(A\cap B)=\frac{0+1+0}{6^2}=\frac{1}{36}$

$P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$

(5) $B=\{(1,1),(1,2),\cdots\cdots,(1,6),$
$\quad\quad,(2,2),\cdots\cdots,(2,6),$
$\quad\quad\quad\ddots\quad\vdots$
$\quad\quad\quad\quad,(6,6)\}$

$P(B)=\frac{6+5+4+3+2+1}{6^2}=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$，$P(A\cap B)=\frac{2+2+3}{6^2}=\frac{7}{36}$

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

故選(4)。

6. (2)

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：能利用算幾不等式求極值

解析：令 $t=2^x+2^y>0$，則 $t^2=4^x+4^y+2^{x+y+1}\Rightarrow 4^x+4^y=t^2-2^{x+y+1}$

又 $4^x+4^y=2(2^x+2^y)$，故 $t^2-2^{x+y+1}=2t\Rightarrow\frac{t^2-2t}{2}=2^{x+y}$

$\because 2^{x+y}>0$

$\Rightarrow\frac{t^2-2t}{2}>0\Rightarrow t(t-2)>0\Rightarrow t<0$ 或 $t>2$ ……………①

再由算幾不等式

$\frac{2^x+2^y}{2}\geq\sqrt{2^x\cdot 2^y}\Rightarrow\frac{t}{2}\geq\sqrt{\frac{t^2-2t}{2}}\Rightarrow\frac{t^2}{4}\geq\frac{t^2-2t}{2}$

$\Rightarrow t^2\geq 2t^2-4t\Rightarrow 0\geq t^2-4t=t(t-4)\Rightarrow 0\leq t\leq 4$……………②

綜合①、②可知 $2<t\leq 4$

故選(2)。

二、多選題

7. (1)(4)(5)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：多項式的基本運算與求值

解析：$2x^3+6x^2+3x+k$

$=2(x^3+3ax^2+3a^2x+a^3)-bx-ab-4$

$=2x^3+6ax^2+(6a^2-b)x+2a^3-ab-4$

(1)○；(2)╳；(3)╳：$\begin{cases}6=6a\\3=6a^2-b\\k=2a^3-ab-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=3\\k=-5\end{cases}$

故 $f(x)=2(x+1)^3-3(x+1)-4$

(4)○：$f(-0.99)=2\times(0.01)^3-3(0.01)-4$

$=-4.03+2\times(0.01)^3>-4.03$

(5)○：$f(\sqrt{2}-1)=2(\sqrt{2})^3-3(\sqrt{2})-4=4\sqrt{2}-3\sqrt{2}-4$

$=\sqrt{2}-4\approx1.414-4=-2.586<-2$

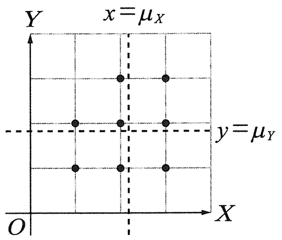
故選(1)(4)(5)。

8. (2)(3)(5)

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

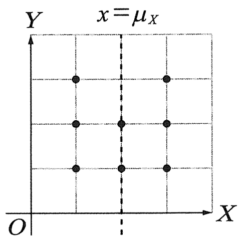
目標：正、負、零相關的基本判斷

解析：(1)╳：



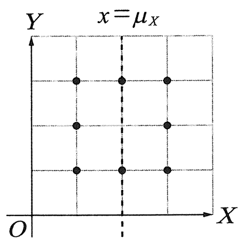
$r\neq0$

(2)○：



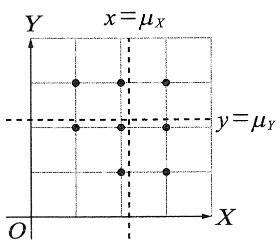
對稱 $x=\mu_X\Rightarrow r=0$

(3)○：



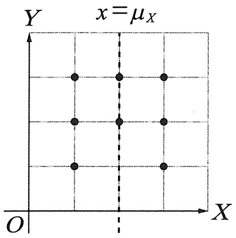
對稱 $x=\mu_X\Rightarrow r=0$

(4)╳：



$r\neq0$

(5) ○：



對稱 $x=\mu_X \Rightarrow r=0$

故選(2)(3)(5)。

9. (2)(5)

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：根式的化簡與估計

解析：(1) ╳：$AB=\sqrt{4^2-(\sqrt{7})^2}=\sqrt{9}=3$

(2) ○：$A^2+B^2=4+\sqrt{7}+4-\sqrt{7}=8$

$$A=\sqrt{\frac{8+2\sqrt{7}}{2}}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{1}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}+\sqrt{2}}{2}$$

$$B=\sqrt{\frac{8-2\sqrt{7}}{2}}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2}$$

$A-B=\sqrt{2}$，$A+B=\sqrt{14}$

(3) ╳：$1<A-B=\sqrt{2}<2$

(4) ╳：$A^3-B^3=(A-B)^3+3AB(A-B)$

$=(\sqrt{2})^3+3\times 3\times\sqrt{2}=11\sqrt{2}$

$\approx 11\times 1.414=15.\cdots\cdots$

(5) ○：$A^3+B^3=(A+B)^3-3AB(A+B)$

$=(\sqrt{14})^3-3\times 3\times\sqrt{14}$

$=5\sqrt{14}$

$\approx 5\times 3.742=18.\cdots\cdots$

故選(2)(5)。

10. (1)(2)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：乘法原理基本問題，多項式方程式、不等式，餘式問題的求法

解析：依照 $A_1 \to A_4 \to A_3 \to A_5 \to A_2$ 的順序塗

$f(x)=x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-2)\cdot(x-2)$

$=x(x-1)(x-2)^3$

(1) ○：$f(3)=3\times 2\times 1^3=6$

(2) ○：$\deg f(x)=5$

(3) ╳：$f(x)=x(x-1)(x^3-6x^2+12x-8)$

$=(x^2-x)(x(x^2-6x+12)-8)$

$f(x)$ 除以 $x^2-6x+12$ 的餘式

$=(x^2-x)\cdot(-8)$ 除以 $x^2-6x+12$ 的餘式

$=-40x+96$

$$\begin{array}{r|l} & -8 \\ \hline x^2-6x+12 & -8x^2+8x \\ & -8x^2+48x-96 \\ \hline & -40x+96 \end{array}$$

(4) ╳：$f(x)=0 \Rightarrow x=0$ 或 1 或 2

$f(x^3)=0 \Rightarrow x^3=0$ 或 1 或 2

注意到：$x^3=1 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0$

$\Rightarrow x$ 有 1 實根 2 虛根

(5) ╳：$(x-1)f(x)<0 \Rightarrow x(x-1)^2(x-2)^3<0$

$\Rightarrow x(x-2)<0$ 但 $x\neq 1$

$\Rightarrow 0<x<2$ 但 $x\neq 1$

故選(1)(2)。

11. (1)(3)(4)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：首、尾數與位數、最高位數字的關聯性

解析：$\log x \approx 4.7$

$\Rightarrow 4.65 \le \log x < 4.75$ ……(＊)

$\Rightarrow \log x$ 的首數為 4，尾數介於 0.65～0.75 之間

(1) ○：x 為 $4+1=5$ 位數

(2) ╳：由 $\log 4 \approx 0.6020$

$\log 5 \approx 0.6990$

$\log 6 \approx 0.7781$

$\Rightarrow x$ 的最高位數字可能為 4 或 5

$(*)\times\frac{1}{2} \Rightarrow 2.325 \le \frac{1}{2}\log x < 2.375$

$\Rightarrow 2.325 \le \log\sqrt{x} < 2.375$

$\Rightarrow \log\sqrt{x}$ 的首數為 2，尾數介於 0.325～0.375 之間

(3) ○：$\sqrt{x}$ 為 $2+1=3$ 位數

(4) ○：由 $\log 2 \approx 0.3010$

$\log 3 \approx 0.4771$

$\Rightarrow x$ 的最高位數字為 2

(5) ╳：$\log x < 4+\log 5.8$

$\Rightarrow x < 58000$

又 $\sqrt{x} \le 299$　$\therefore x+\sqrt{x} < 60000$

故選(1)(3)(4)。

12. (3)(5)

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：集合的基本概念、基本計數原理

解析：(1) ╳：$A=\{6,7,8,9,10\} \Rightarrow \Sigma(A)=6+7+8+9+10=40$

(2) ╳：$A=\{1,2,3,4\} \Rightarrow \Sigma(A)=1+2+3+4=10$

(3) ○：$A=\{1,2,3\} \Rightarrow \Sigma(A)=6$

$A=\{1,2,4\} \Rightarrow \Sigma(A)=7$

$A=\{1,2,5\} \Rightarrow \Sigma(A)=8$

$\vdots$

$A=\{7,9,10\} \Rightarrow \Sigma(A)=26$

$A=\{8,9,10\} \Rightarrow \Sigma(A)=27$

$\therefore \Sigma(A)$ 有 $27-6+1=22$ 種可能值

(4) ╳：$1+9$，$2+8$，$3+7$，$4+6$，共 4 種

(5) ○：$n(A)=1 \Rightarrow 10$，1 種

$n(A)=2 \Rightarrow 1+9$，$2+8$，$3+7$，$4+6$，4 種

$n(A)=3 \Rightarrow 1+2+7$，$1+3+6$，$1+4+5$，$2+3+5$，4 種

$n(A)=4 \Rightarrow 1+2+3+4$，1 種

$\therefore$ 共 10 種

故選(3)(5)。

13. (1)(4)(5)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：對數運算的性質與應用

解析：$6^x=3 \Rightarrow x=\log_6 3$

(1) ○：$\because x=\log_6 3>\log_6\sqrt{6}=\frac{1}{2}$，$y=\log_9 6>\log_9\sqrt{9}=\frac{1}{2}$

$\therefore x+y>1$

(2)╳：$x\cdot y=\dfrac{\log 3}{\log 6}\cdot\dfrac{\log 6}{\log 9}=\dfrac{\log 3}{\log 9}=\log_9 3=\dfrac{1}{2}$

(3)╳：$x=\log_6 3=\dfrac{\log 3}{\log 6}\approx\dfrac{0.4771}{0.7781}\approx 0.6$，$y=\log_9 6=\dfrac{\log 6}{\log 9}\approx\dfrac{0.7781}{0.9542}\approx 0.8$

$\therefore x<y$

(4)○：$\because x+1=\log_6 3+\log_6 6=\log_6 18$，$2y+1=2\log_9 6+\log_9 9=\log_9(6^2\times 9)=\log_9 324=\log_3 18$

$\therefore \dfrac{x+1}{2y+1}=\dfrac{\log_6 18}{\log_3 18}=\dfrac{\log_{18} 3}{\log_{18} 6}=\log_6 3$

(5)○：$2^{1-xy}=2^{1-\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

$3^{y-xy}=3^{\log_9 6-\frac{1}{2}}=3^{\log_9 6-\log_9 3}=3^{\log_9 2}=2^{\log_9 3}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

故選(1)(4)(5)。

第貳部分：選填題

A. 2；-1

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：複數的基本運算

解析：令 $z=a+bi$，a，$b\in\mathrm{R}$

$$\begin{cases}(a+bi)+(a-bi)=4\\(a+bi)-(a-bi)=-2i\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a=4\\2bi=-2i\end{cases}\Rightarrow a=2，b=-1。$$

B. 50

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：遞迴關係式的意義

解析：

$a_1=2$ (偶數)

$n=1$：$a_2=a_1+1=3$ (奇數)

$n=2$：$a_3=2a_2+1=7$ (奇數)

$n=3$：$a_4=3a_3+1=22$ (偶數)

$n=4$：$a_5=4a_4+1=89$ (奇數)

$n=5$：$a_6=5a_5+1=446$ (偶數)

$\vdots$

當 n 為偶數時，na_n+1 為奇數，即 a_3，a_5，a_7，……，a_{101} 為奇數

又 a_2 為奇數

$\therefore$共有 51 項奇數

故有 $101-51=50$ 項偶數。

C. 20

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：平均數、中位數、標準差概念的應用

解析：設 $x_1\le x_2\le x_3\le x_4$ ……………………①

$\mu=2\Rightarrow x_1+x_2+x_3+x_4=8$ ……………②

$M_e=2\Rightarrow\dfrac{x_2+x_3}{2}=2\Rightarrow x_2+x_3=4$ ……③

由③得 $x_2=1$，$x_3=3$ 或 $x_2=x_3=2$，再考慮①、②，有以下 3 種可能：

❶ $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,1,3,3)$

此時 $\sigma=\sqrt{\dfrac{(1-2)^2+(1-2)^2+(3-2)^2+(3-2)^2}{4}}=1$，合 $\Rightarrow x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+x_4{}^2=1^2+1^2+3^2+3^2=20$

❷ $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,2,2,3)$

此時 $\sigma=\sqrt{\dfrac{(1-2)^2+(2-2)^2+(2-2)^2+(3-2)^2}{4}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1$，不合

❸ $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(2,2,2,2)$

此時 $\sigma=0<1$，不合

D. 420

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：能使用二項式定理處理展開式中的係數問題

解析：$(x+ky)^5=\cdots\cdots+C_3^5x^2(ky)^3+\cdots\cdots$

$(kx+y)^5=\cdots\cdots+C_3^5(kx)^2y^3+\cdots\cdots$

$C_3^5k^3=3\times C_3^5k^2\Rightarrow k=3$

$(x+3y)^5=\cdots\cdots+C_4^5x(3y)^4+\cdots\cdots$

$(3x+y)^5=\cdots\cdots+C_4^5(3x)y^4+\cdots\cdots$

$\therefore$所求為 $C_4^5\times3^4+C_4^5\times3=405+15=420$。

E. $\dfrac{1}{13}$

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：條件機率的意義與求法

解析：4 次總分 4 分的情形如下：

(1) 4 同：$1+1+1+1=4\Rightarrow$ 發生的機率為$\left(\dfrac{1}{3}\right)^4=\dfrac{1}{81}$

(2) 3 同 1 異：無

(3) 2 同 2 同：無

(4) 2 同 2 異：$2+2+1+(-1)=4\Rightarrow$ 發生的機率為$\dfrac{4!}{2!}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^4=\dfrac{12}{81}$

(5) 4 異：無

$P(\text{無負分}\mid\text{總分為 4 分})=\dfrac{P(\text{無負分且總分為 4 分})}{P(\text{總分為 4 分})}=\dfrac{\dfrac{1}{81}}{\dfrac{1}{81}+\dfrac{12}{81}}=\dfrac{1}{13}$。

F. $\left(\dfrac{3}{2},10\right)$

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：線性調分對統計量的影響

解析：設數學成績 X，物理原始成績 Y，調分後 $Y'=aY+b$

則我們有：

$\mu_{Y'}=a\mu_Y+b$

$\sigma_{Y'}=|a|\cdot\sigma_Y$

$r_{X,Y}=r_{X,Y'}$ 或$-r_{X,Y'}$ (不會發生)

$\because m'=\dfrac{3}{2}m$，這表示 m' 與 m 同號

$\therefore r_{X,Y}$ 與 $r_{X,Y'}$ 也同號，因此 $a>0$

$\mu_{Y'}=a\mu_Y+b\Rightarrow 70=40a+b\ \cdots\cdots\cdots$①

$m'=r_{X,Y'}\times\dfrac{\sigma_{Y'}}{\sigma_X}=r_{X,Y}\times\dfrac{a\times\sigma_Y}{\sigma_X}=a\times r_{X,Y}\times\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}=a\times m$

又 $m'=\dfrac{3}{2}m\quad\therefore a=\dfrac{3}{2}$ 代回①得 $b=10$

故數對 $(a\ ,b)=\left(\dfrac{3}{2},10\right)$。

G. $\frac{1}{2}$

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：絕對值線性函數圖形的應用

解析：① $x \geq a$：$y=(x+1)+(x-a)=2x+(1-a)$

$$\text{令 } y=\frac{5}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}=2x+1-a$$

$$\Rightarrow 2x=\frac{3}{2}+a$$

$$\Rightarrow x=\frac{3}{4}+\frac{a}{2}$$

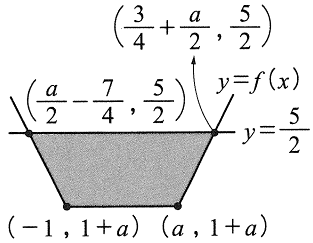
② $-1 \leq x < a$：$y=(x+1)+(a-x)=1+a$

③ $x<-1$：$y=(-x-1)+(a-x)=-2x+(a-1)$

$$\text{令 } y=\frac{5}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}=-2x+a-1$$

$$\Rightarrow 2x=a-\frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{a}{2}-\frac{7}{4}$$



上底：$\left(\frac{3}{4}+\frac{a}{2}\right)-\left(\frac{a}{2}-\frac{7}{4}\right)=\frac{5}{2}$

下底：$a-(-1)=a+1$

高：$\frac{5}{2}-(1+a)=\frac{3}{2}-a$

故面積為 $\dfrac{\left(a+1+\frac{5}{2}\right)\times\left(\frac{3}{2}-a\right)}{2}=2$

$\Rightarrow \left(a+\frac{7}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-a\right)=4$

$\Rightarrow -a^2-2a+\frac{21}{4}=4$

$\Rightarrow 4a^2+8a-5=0$

$\Rightarrow (2a+5)(2a-1)=0$

$\Rightarrow a=-\frac{5}{2}$(不合)或 $\frac{1}{2}$。