

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(2)	(3)	(3)	(5)	(1)	(4)	(4)	(1)(3)	(1)(5)	(2)(3)(4)	(1)(2)(4)	(3)(4)(5)	(2)(3)(4)(5)	3	2
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
-	2	2	4	3	9	6	0	2	1	1	2	5	2	5
31	32	33												
1	8	5												

第壹部分

一、單選題

1. (2) 【難易度】☆☆☆

【出處】第二冊 第二章 排列、組合

【解析】 $(31-n) \cdot (32-n) \cdot \dots \cdot (40-n)$
 $= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (30-n)(31-n)(32-n) \cdot \dots \cdot (40-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (30-n)}$
 $= \frac{(40-n)!}{(30-n)!} = \frac{(40-n)!}{((40-n)-10)!} = P_{10}^{40-n}$ 故選(2)

2. (3) 【難易度】☆☆☆

【出處】第一冊 第三章 指數、對數函數

【解析】考慮指數函數 $y=3^x$
 $3^{-1} = \frac{1}{3}, 3^{-2} = \frac{1}{9} \therefore \frac{1}{9} < \frac{1}{\pi} < \frac{1}{3} \therefore 3^{-2} < 3^a < 3^{-1}$
 故 $-2 < a < -1$ 故選(3)

3. (3) 【難易度】☆☆☆

【出處】第一冊 第一章 數與式

【解析】設二樓客房有 x 間，三樓客房有 $x+5$ 間
 依題意可得 $\begin{cases} 4x < 48 < 5x \\ 3(x+5) < 48 < 4(x+5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{48}{5} < x < 12 \dots\dots ① \\ 7 < x < 11 \dots\dots ② \end{cases}$
 同時滿足①、②式的 $x=10$
 \therefore 二樓和三樓共有 $10+15=25$ 間客房 故選(3)

4. (5) 【難易度】☆☆☆

【出處】第二冊 第三章 機率

【解析】設 A 表示第一次取出白球的事件
 設 B 表示第一次取出黑球的事件
 設 C 表示第二次取出白球的事件
 則 $p_1 = P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$
 $p_2 = P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$
 $\therefore p_1 < p_2$ 故選(5)

5. (1) 【難易度】☆☆☆

【出處】第二冊 第一章 數列與級數

【解析】 $a_n = S_n - S_{n-1}, n \geq 2$
 $= \frac{\pi}{12}(2n^2+n) - \frac{\pi}{12}(2(n-1)^2+n-1) = \frac{\pi}{12}(4n-1)$
 又 $a_1 = S_1 = \frac{\pi}{12} \cdot (2 \cdot 1^2 + 1) = \frac{\pi}{12} \cdot 3 = \frac{\pi}{4}$
 亦滿足 $a_n = \frac{\pi}{12}(4n-1)$
 故 $\langle a_n \rangle$ 為等差數列
 且公差 $= a_2 - a_1 = \frac{\pi}{12} \cdot 7 - \frac{\pi}{12} \cdot 3 = \frac{\pi}{3}$ 大於 $a_1 = \frac{\pi}{4}$ 故選(1)

6. (4) 【難易度】☆☆☆

【出處】第二冊 第二章 排列、組合

【解析】將 6 個班級分成 $(2, 2, 2)$ ，分別分配給 3 個國文老師
 故安排方法有 $\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2 \times 3!}{3!} = 90$ 故選(4)

7. (4) 【難易度】☆☆☆

【出處】第一冊 第二章 多項式函數

【解析】 $\therefore f(0) = -2$
 $f(1) = 3 - a - b - 2 = 1 - a - b$
 $f(-1) = 3 + a + b - 2 = 1 + a + b$
 $\therefore f(1) + f(-1) = 2$
 $\therefore f(1), f(-1)$ 中至少有一數為正數
 $\therefore f(0) \cdot f(1)$ 或 $f(0) \cdot f(-1)$ 至少有一數為負數
 由勘根定理知：
 $f(x) = 0$ 至少有一實根介於 $[0, 1]$ 或 $[-1, 0]$
 故 $f(x) = 0$ 至少有一實根介於 $[-1, 1]$ ，又由虛根成對定理知
 $f(x) = 0$ 可能有 2 實根 2 虛根或 4 個實根 故選(4)

二、多選題

8. (1)(3) 【難易度】☆☆☆

【出處】第一冊 第二章 多項式函數

【解析】① $f(x)$ 向右平移 k 單位，向上平移 k 單位
 $\Rightarrow 5(x-k) - 2 + k = 5x - 4k - 2 = 5x + 7 \Rightarrow k = -\frac{9}{4}$ (不合)
 ② $f(x)$ 向右平移 k 單位，向下平移 k 單位
 $\Rightarrow 5(x-k) - 2 - k = 5x - 6k - 2 = 5x + 7 \Rightarrow k = -\frac{3}{2}$ (不合)
 ③ $f(x)$ 向左平移 k 單位，向上平移 k 單位
 $\Rightarrow 5(x+k) - 2 + k = 5x + 6k - 2 = 5x + 7 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$
 ④ $f(x)$ 向左平移 k 單位，向下平移 k 單位
 $\Rightarrow 5(x+k) - 2 - k = 5x + 4k - 2 = 5x + 7 \Rightarrow k = \frac{9}{4}$
 所以 $k = \frac{3}{2}, \frac{9}{4}$ 故選(1)(3)

9. (1)(5) 【難易度】☆☆☆

【出處】第二冊 第四章 數據分析

【解析】將兩組數據各減去 80 後，列表如下：

A	-4	-4	-2	-1	0	0	2	3	4	5	總和 = 3
B	-10	-8	-5	-4	0	1	4	4	7	8	總和 = -3

 (1)○ 由上表 A 組總和 $3 > B$ 組總和 -3 可知
 (2)× B 組分數比 A 組分散，所以 B 組的標準差比較大
 (3)× A 組的中位數 $= \frac{80+80}{2} = 80$
 B 組的中位數 $= \frac{80+81}{2} = 80.5$
 (4)× A 組的全距 $= 85 - 76 = 9$
 B 組的全距 $= 88 - 70 = 18$
 (5)○ 由上表知：以 80 為中心，平移 80 後的總分 $= 3 + (-3) = 0$
 \therefore 全體的算術平均數 $= 80$
 故選(1)(5)

10. (2)(3)(4) 【難易度】☆☆☆

【出處】第一冊 第二章 多項式函數

【解析】由餘式定理知： $f(b) = 2$
 $\Rightarrow b^3 + (b^2 - 8b) \cdot b^2 - 7b \cdot b - 5b - 22 = 2$
 $\Rightarrow b^4 - 7b^3 - 7b^2 - 5b - 24 = 0$
 $\therefore b$ 是整數
 \therefore 由牛頓定理，檢驗可能的有理根後
 可得 $b^4 - 7b^3 - 7b^2 - 5b - 24 = (b-8)(b^3 + b^2 + b + 3) = 0$
 $\therefore b = 8$ (不難看出 $b^3 + b^2 + b + 3 = 0$ 無整數解)
 故 $f(x) = x^3 + 0x^2 - 56x - 62$
 綜合除法如下：

1	+0	-56	-62	8
	+8	+64	+64	
1	+8	+8	+2	

 故 $a_1 = 8, a_2 = 64, a_3 = 64$
 $b_1 = 8, b_2 = 8$
 故選(2)(3)(4)

11. (1)(2)(4) 【難易度】☆☆☆

【出處】第二冊 第三章 機率

【解析】(1)○ 依題意，只要有一片不合格就退貨
 所以被退貨的機率 $= \frac{C_2^5 + C_1^5 C_1^{45}}{C_2^{50}}$
 (2)○ 設 A 表示抽出的 2 片口罩中，至少有 1 片不合格的事件
 故被退貨的機率為 $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{C_2^{45}}{C_2^{50}}$
 (3)× 被退貨的機率為 $\frac{5}{50} \times \frac{4}{49} + \frac{5}{50} \times \frac{45}{49} + \frac{45}{50} \times \frac{5}{49}$

- (4)○ 設該公司控制該包 50 片口罩至多有 k 片不合格
 $P(A) = 1 - \frac{C_2^{50-k}}{C_2^{50}} = 1 - \frac{(50-k)(49-k)}{50 \times 49} < 0.1$
 $\Rightarrow \frac{(50-k)(49-k)}{50 \times 49} > 0.9$
 $k=2$ 時, $\frac{48 \times 47}{50 \times 49} \approx 0.92 > 0.9$
 $k=3$ 時, $\frac{47 \times 46}{50 \times 49} \approx 0.88 < 0.9$
 \therefore 應控制至多 2 片不合格

(5)× 承(4)可知
 故選(1)(2)(4)

12. (3)(4)(5)

【難易度】★★☆

【出處】第二冊 第四章 數據分析

【解析】因為 $\sum_{i=1}^{20} (y_i - ax_i - b)^2 = 0$, 所以所有樣本點在同一直線上, 此直線就是迴歸直線方程式 $y = ax + b$

\therefore 迴歸直線必通過 $(\bar{x}, \bar{y}) = (20, 45)$, 所以斜率 $a = \frac{40-45}{30-20} = -\frac{1}{2}$

將 $(20, 45)$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x + b$, 得 $b = 55$

(1)× $\therefore a = -\frac{1}{2} < 0$

\therefore 所有樣本點落在一條斜率為負的直線上 $\therefore r = -1$

(2)× $a = -\frac{1}{2}$

(3)○ $b = 55$

(4)○ $a = r \times \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \Rightarrow -\frac{1}{2} = -1 \times \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \Rightarrow \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma_x > \sigma_y$

(5)○ $\therefore 2 \times (-3) < 0 \therefore r' = -r = 1$
 $\sigma_x' = 2\sigma_x, \sigma_y' = 3\sigma_y$

$\therefore (x_i', y_i')$ 的迴歸直線斜率 $= r' \times \frac{\sigma_y'}{\sigma_x'} = 1 \times \frac{3\sigma_y}{2\sigma_x}$
 $= \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

故選(3)(4)(5)

13. (2)(3)(4)(5)

【難易度】★★★

【出處】第一冊 第一章 數與式、第三章 指數、對數函數
 第二冊 第二章 排列、組合

【解析】(1)× $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| \approx |1.414 - 1.732| = 0.318$
 $|2 - \sqrt{3}| \approx |2 - 1.732| = 0.268$
 $\therefore |\sqrt{2} - \sqrt{3}| > |2 - \sqrt{3}|$ 即 2 比 $\sqrt{2}$ 接近 $\sqrt{3}$

(2)○ $|\log 4 - \log 3| = |\log \frac{4}{3}| = \log \frac{4}{3}$

$|\log 2 - \log 3| = |\log 3 - \log 2| = |\log \frac{3}{2}| = \log \frac{3}{2}$

$\therefore \log \frac{4}{3} < \log \frac{3}{2} \therefore |\log 4 - \log 3| < |\log 2 - \log 3|$

即 $\log 4$ 比 $\log 2$ 接近 $\log 3$

(3)○ $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, (\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$|(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} - 1| = |\frac{\sqrt{2}}{2} - 1| \approx |\frac{1.414}{2} - 1| = 0.293$

$|(\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}} - 1| = |\sqrt{2} - 1| \approx |1.414 - 1| = 0.414$

故 $|(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} - 1| < |(\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}} - 1|$ 即 $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$ 比 $(\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}$ 接近 1

(4)○ $(1.1)^{10} = (1+0.1)^{10}$
 $= C_0^{10} + C_1^{10} \cdot (0.1) + C_2^{10} \cdot (0.1)^2 + C_3^{10} \cdot (0.1)^3 + \dots$
 $= 1 + 1 + 0.45 + 0.12 + \dots$ (正數) $= 2.57 + \dots > 2.5$

故 $|3 - (1.1)^{10}| < |2 - (1.1)^{10}|$ 即 3 比 2 接近 $(1.1)^{10}$

(5)○ 依題意可得 $|(x^4 - 1) - 0| < |15 - 0| \Rightarrow |x^4 - 1| < 15$
 $\Rightarrow -15 < x^4 - 1 < 15 \Rightarrow -14 < x^4 < 16$

但 $x^4 \geq 0 \therefore 0 \leq x^4 < 16$

解 $x^4 < 16 \Rightarrow (x^2 + 4)(x^2 - 4) < 0 \Rightarrow (x+2)(x-2) < 0$
 $\Rightarrow -2 < x < 2$

故選(2)(3)(4)(5)

第貳部分：選填題

A. $\frac{3}{2}$

【難易度】★★☆

【出處】第一冊 第三冊 指數、對數函數

【解析】 $\overline{AB} = \log \frac{7}{3} - \log \frac{7}{24} = \log \frac{\frac{7}{3}}{\frac{7}{24}} = \log 8$

$\overline{BC} = \log \frac{28}{3} - \log \frac{7}{3} = \log \frac{\frac{28}{3}}{\frac{7}{3}} = \log 4$

故 $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\log 8}{\log 4} = \frac{\log 2^3}{\log 2^2} = \frac{3 \log 2}{2 \log 2} = \frac{3}{2}$

B. $\frac{-2}{243}$

【難易度】★★☆

【出處】第二冊 第一章 數列與級數

【解析】 $\therefore a_2 \cdot a_5 = (a_1 r) \cdot (a_1 r^4) = a_1 \cdot (a_1 r^5) = a_1 \cdot a_6$

$$\therefore \begin{cases} a_1 \cdot a_6 = -972 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ a_1 + a_6 = -484 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

由①得 $a_6 = \frac{-972}{a_1}$ 代入②得

$$a_1 + \frac{-972}{a_1} = -484 \Rightarrow a_1^2 + 484a_1 - 972 = 0$$

$$\Rightarrow (a_1 - 2)(a_1 + 486) = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = 2, a_6 = -486 \text{ (不合, } \because -1 < r < 0)$$

$$\text{或 } a_1 = -486, a_6 = 2$$

$$\therefore a_6 = a_1 \cdot r^5 \Rightarrow 2 = -486 \cdot r^5 \Rightarrow r^5 = \frac{-1}{243}$$

$$\text{故 } a_{11} = a_6 \cdot r^5 = 2 \cdot \frac{-1}{243} = \frac{-2}{243}$$

C. 960

【難易度】★★☆

【出處】第一冊 第一章 數與式

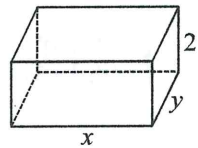
【解析】設此長方體長為 x 公尺, 寬為 y 公尺
 依題意可得: $x \cdot y \cdot 2 = 800 \Rightarrow xy = 400$

又游泳池總造價等於

$$2 \cdot xy + 1 \cdot (2x + 2x + 2y + 2y)$$

$$= 800 + 4(x+y) \geq 800 + 4 \cdot 2\sqrt{xy}$$

$$= 800 + 8 \cdot \sqrt{400} = 960 \text{ (萬元)}$$



D. 21

【難易度】★★☆

【出處】第一冊 第三章 指數、對數函數

【解析】設今年的總營業額為 N , 且明年餐飲部門營業額比今年增加 $a\%$
 依題意可列式如下:

$$N(1+10\%) \times \frac{22}{100} = N \times \frac{20}{100} \cdot (1+a\%)$$

$$\Rightarrow 1.1 \times 22 = 20 \cdot (1+a\%)$$

解得 $a = 21$

E. $\frac{1}{25}$

【難易度】★★☆

【出處】第二冊 第三章 機率

【解析】設未篩檢前已受感染的比例為 x

$$x \begin{cases} 0.8 : \text{顯示有感染 (試劑準確)} \\ 0.2 : \text{(已感染)} \end{cases}$$

$$1-x \begin{cases} 0.8 : \text{顯示有感染 (試劑不準確)} \\ 0.2 : \text{(未感染)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{0.2(1-x)}{0.8x+0.2(1-x)} = \frac{6}{7}$$

$$\text{解得 } x = 0.04 = \frac{1}{25}$$

F. 25

【難易度】★★★

【出處】第二冊 第二章 排列、組合

【解析】由二項式定理知:

$$(1+x)^m \text{ 的 } x \text{ 項係數} = C_1^m = m$$

$$(1+x)^n \text{ 的 } x \text{ 項係數} = C_1^n = n$$

$$\therefore f(x) = (1+x)^m + (1+x)^n \text{ 的 } x \text{ 項係數} = m+n=11$$

同理可知:

$$f(x) \text{ 的 } x^2 \text{ 項係數} = C_2^m + C_2^n = \frac{m(m-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(m^2 - m + n^2 - n)$$

$$= \frac{1}{2}(m^2 - m + (11-m)^2 - (11-m))$$

$$= \frac{1}{2}(2m^2 - 22m + 110)$$

$$= m^2 - 11m + 55$$

$$= (m - \frac{11}{2})^2 + \frac{99}{4}$$

$\therefore m$ 是正整數

$$\therefore m=5 \text{ 或 } 6 \text{ 時, 最小值} = \frac{1}{4} + \frac{99}{4} = 25$$

G. 185

【難易度】★★★

【出處】第二冊 第二章 排列、組合

【解析】① 5 名只會划右舷者選 2 位在右舷, 再搭配 2 名左右舷都會划者在右舷, 其餘 4 名只會划左舷者全部在左舷, 共有 $C_2^5 \cdot C_2^2 \cdot C_4^4 = 10$ 種

② 5 名只會划右舷者選 3 位在右舷, 再搭配 2 名左右舷都會划者的其中一位在右舷, 其餘會划左舷者選出 4 名在左舷, 共有 $C_3^5 \cdot C_1^2 \cdot C_4^4 = 100$ 種

③ 5 名只會划右舷者選 4 位在右舷, 其餘會划左舷者選 4 位在左舷, 共有 $C_4^5 \cdot C_1^4 = 75$ 種
 故共有 $10 + 100 + 75 = 185$ 種