台北區 109 學年度第一學期第一次學科能力測驗

第壹部分：選擇題（占 60 分）

RA285

一、單選題（占 30 分）

1. 多項式 $f(x)=(x^2+4x+5)(x^2-5x+3)$，則下列何者為 $f(x)\le 0$ 的解？
   (1) $\sqrt{10}$　(2) $-\sqrt{10}$　(3) 0　(4) -3　(5) 8

2. 右圖是某閏年二月的月曆，其中黑色粗框所圍 4 天的日期和為 64，請問該年的五月一日是星期幾？

日	一	二	三	四	五	六

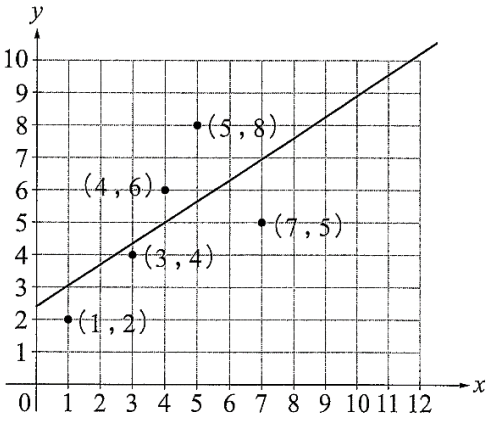
   (1) 星期一
   (2) 星期二
   (3) 星期三
   (4) 星期四
   (5) 星期五

3. 設數列 $<a_n>$ 為等差數列，S_n 為此數列前 n 項的和，若 $a_{2020}=S_{2020}=2020$，則滿足 $a_n>S_n$ 的正整數 n 有幾個？(1) 0　(2) 1010　(3) 2018　(4) 2020　(5) 無限多個

4. 班佛法則：銀行存款首位數字為 a 的比例約有 $\log(1+\frac{1}{a})$，例如存款金額為 43210 元的首位數字為 4，所有首位數字為 4 的存款所占比例約 $\log(1+\frac{1}{4})$，請根據班佛法則，估計銀行存款的首位數字為 4 或 5 的人約有多少比例？
   (1) 12%　(2) 14%　(3) 16%　(4) 18%　(5) 20%

5. 方程式 $|x-1|+|x-2|=|x-5|+|x-8|$ 的實數解有幾個？
   (1) 0 個　(2) 1 個　(3) 2 個　(4) 3 個　(5) 超過 3 個

6. 有 $(1,2)$、$(3,4)$、$(4,6)$、$(5,8)$、$(7,5)$ 等 5 筆資料，其散佈圖與迴歸直線如下圖所示。請問再加入下列哪一個選項的資料後，此 6 筆資料的相關係數最大？



   (1) $(1,7)$
   (2) $(4,5)$
   (3) $(5,3)$
   (4) $(8,5)$
   (5) $(11,9)$

二、多選題（占 30 分）

7. 已知一等差數列 $<a_n>$ 為 5, 8, 11,…., a_{100}，一等比數列 $<b_n>$ 為 2, 4, 8,…, b_{100}，且兩數列都有的數稱為共同項，例如：8。試選出正確的選項。
   (1) $a_{23}=74$　(2) $b_7=128$　(3) 共同項的數列亦為等差數列
   (4) a_2、a_{10} 皆為共同項　(5) 有四個共同項

8. 設 a 為大於 1 的實數，考慮函數 $f(x)=a^x$ 與 $g(x)=\log_a x$，試選出正確的選項。
   (1) 若 $f(6)=3$，則 $g(\sqrt{3})=3$　(2) $\frac{f(2020)}{f(2010)}\cdot\frac{f(99)}{f(109)}=1$
   (3) $g(2020)-g(2010)=g(109)-g(99)$　(4) 若 $x_1\ne x_2$，則 $\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}\ge g(\frac{x_1+x_2}{2})$
   (5) 若直線 $y=3x$ 與 $y=f(x)$ 的圖形有 m 個交點，直線 $y=\frac{1}{3}x$ 與 $y=g(x)$ 的圖形有 n 個交點，則 $m+n$ 必為偶數

9. 設一樣本空間U至少包含A、B兩事件，其中$P(A)=x$，$P(B)=y$且$P(A\mid B)=\frac{1}{2}$，$P(B\mid A)=\frac{2}{3}$，試選出正確的選項。(1) $x:y=3:4$ (2) $x\le\frac{1}{2}$ (3) $y\le\frac{4}{5}$ (4) 若A、B為獨立事件，則$x=\frac{1}{3}$ (5) 若A、B為獨立事件，則$P(A\cap B)=\frac{1}{3}$

10. 「洗八拉」是一種利用四顆相同公正骰子來進行比大小的遊戲，其規則如下：
(i)如果擲出點數為二同二異時，取其二異點數之和為擲出的點數。例如擲出「1134」計為七點；擲出「3356」計為十一點。又其中出現二同之外的兩個骰子為1和2時，稱為「逼機」，此時擲出者直接判輸，遊戲結束，例如「5512」即為此狀況。
(ii)如果擲出二同二同的點數，取其大者之和為擲出者點數。例如擲出「2233」計為六點；擲出「5566」計為十二點。而其中擲出者出現十二點時直接獲勝，遊戲結束。
(iii)如果擲出四個相同點數稱為「一色」，此時不計點數，擲出者直接獲勝，遊戲結束
(iv)除以上三種情形外皆無結果，需重新再擲，直到出現上述狀況為止。
試選出正確的選項。
(1) 擲出「逼機」的點數組合有1種 (2) 擲出八點的點數組合有11種 (3) 只擲一次，擲出八點的機率為$\frac{114}{6^4}$ (4) 帥勛和傑哥比賽此遊戲，規定由帥勛先擲，在帥勛第一次擲出後直接結束遊戲的機率為$\frac{84}{6^4}$ (5) 帥勛和傑哥比賽此遊戲，規定由帥勛先擲，在帥勛第一次擲出後直接結束遊戲的狀況下，帥勛獲勝的機率大於傑哥獲勝的機率

11. 已知實係數多項式函數$f(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$，其中$a\neq 0$，下列關於此多項式的解，試選出正確的選項。
(1) 若$b^2-4ac=0$，則$ax^2+bx+c=0$有兩相同實根，且$f(x)=0$恰有兩相異實根
(2) 若$b^2-4ac>0$，且$a+b+c<0$，則$f(x)=0$有三個相異實根
(3) 若$b^2-4ac<0$，則$ax^2+bx+c=0$無實根，且$f(x)=0$只有一個實根
(4) 若$y=f(x)$的圖形與x軸只有一個交點，則$b^2-4ac<0$
(5) 若$y=f(x)$的圖形與x軸的交點不只一個，則$b^2-4ac\ge 0$。

12. 生活中人們對數據的解讀常有些錯誤的結論，請從數據分析的角度，試選出正確的選項。(1) 108年指定科目考試成績公佈，由於今年竟然有一半的人成績達到或高於均標(中位數)，因此今年的數學考試比以往簡單
(2) 日本的高中與大學入學成績都是用偏差值表示，偏差值為$50+10z$，其中z為標準化分數。已知皮皮的大學入學數學成績偏差值為52，則皮皮成績必高於該年度的大學入學數學平均成績
(3) 本季高中籃球聯賽，順時高中隊12位球員每位的上場時間大約每場28分鐘；逆時高中隊5名先發球員上場時間接近38分鐘，其餘球員上場時間皆不到10分鐘，則逆時高中隊每位球員上場時間較為一致(標準差較小)
(4) 根據資料，某口罩工廠連續兩年的銷售量成長率分別為＋30%與－30%，則這兩年的平均成長率為0%
(5) OECD調查2018臺灣學生的數學素養與科學素養，臺灣學生的數學素養平均分數是531分，標準差為80分；科學素養的平均分數是516分，標準差為50分，某學生接受採訪表示，該學生的數學素養為577分，科學素養為559分，因此該學生的數學素養與科學素養在全臺灣排名，以科學素養表現較佳

第貳部分：選填題（占 40 分）

A. 某次考試成績全班平均30分，標準差7分，老師決定調整分數，新分數為原始分數的2倍再加10分，且調整分數後沒有人超過100分，則新分數的標準差為_____分。

B. 加零最近整理房間，覺得自己的東西太多，想用厚紙板自製一個無蓋子的長方體收納箱。若不考慮紙板厚度， 加零希望收納箱的體積有18000立方公分且高度為20公分，則加零自製收容內箱的外部表面積最小值為_____平方公分。

C. 已知a，b，c，d為實數， $y=(\log_3 x)^2-a\log_3 x+b$的圖形通過$(1,5)$、$(3,2)$兩點，且當$x=c$時，$y$有最小值$d$，則序組$(a, b, c, d)$=_____。

D. 根據勘根定理的結果發現實係數多項式方程式$f(x)=(x+1)(x^2+2x+a)=0$有三個相異實根，且最大的實根介於4和5之間，則滿足上述條件之a的最大整數為_____。

E. 有一個二次實係數多項式函數$f(x)$，已知$f(0)$、$f(1)$、$f(2)$均不為0，且$f(0), f(1), f(2)$為等比數列，$f(-1)=f(1)=3$，則$f(x)$除以$(x-3)$的餘式為_____。

F. 2020年全球爆發「通衢肺炎」，各國紛紛研發試劑以求能快速檢測出民眾是否感染，其中若有染病則檢測後應呈現陽性反應，否則呈現陰性反應。媒體報導於研發初期，某大國所開發出的試劑在其國內試用時有高達七成的機率檢測錯誤，抽樣染病者驗出陽性機率為$\frac{1}{4}$，未染病者驗出陽性機率為$\frac{2}{3}$，則其可能真實染病人數比例為_____。（化為最簡分數）

G. 有一種神奇的病毒，感染到這種病毒的人只會有以下三種情況：
(i)受感染者本身完全無症狀，而其他人會因吸人受感染者之飛沫而被傳染到相同的病毒，但若與其接觸而未吸人飛沫則不會被感染。（後稱『飛沫傳染』）
(ii)受感染者會有咳嗽與呼吸困難的症狀，但完全不具傳染性。(後稱『不具傳染性』)
(iii)受感染者會失去味覺和嗅覺，而其他人需接觸到此人身體的任何部位，才會被傳染到相同的病毒，但不會因吸入其飛沫而被傳染。（後稱『接觸傳染』）
經過長年的研究發現，感染到這種病毒的人，都只會有以上的其中一種情況，不會同時具有以上兩種或三種情況或其他症狀。今知哞國疾管局在此病毒大流行後發布如下的統計結果：所有感染者中，發生情況(i)的比率為$P(A)=\log_{25} a$，
發生情況(ii)的比率為$P(B)=\log_{256} b$
發生情況(iii)的比率為$P(C)=\log_{81} c$。
若染病後***具傳染性***之比率為***不具傳染性***之比率的 3 倍，而『飛沫傳染』之比率為『接觸傳染』之比率的 2 倍。則$\log(a\times b\times c)=$_____。（四捨五入至小數點後第三位）

H. 航獵藥局有三名藥師，週一到週五每天均需安排兩名藥師負責發放口罩，若每名藥師最多輪值四天，則這五天藥師們有_____種輪值的方式。

RA285　台北區 **109** 學年度第一學期第一次學科能力測驗

參考答案

選擇題： **1.** (1)　**2.** (5)　**3.** (3)　**4.** (4)　**5.** (2)　**6.** (5)　**7.** (2)(4)　**8.** (1)(2)(5)　**9.** (1)(3)(5)
10. (2)(3)(4)　**11.** (2)(3)(5)　**12.** (2)(5)

選填題： **A.** 14　**B.** 3300　**C.** (4,5,9,1)　**D.** −25　**E.** 19　**F.** $\frac{2}{5}$　**G.** 1.778　**H.** 150