數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
答案	(1)	(5)	(3)	(4)	(2)	(5)	(2)(4)	(1)(2)(5)	(1)(3)(5)
題號	10.	11.	12.						
答案	(2)(3)(4)	(2)(3)(5)	(2)(5)						

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (1)

　難易度：易

　出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

　目標：求多項式不等式的解

　解析：由於判別式 $D=b^2-4ac=4^2-4\cdot1\cdot5<0$，所以 $x^2+4x+5>0$ 恆成立

　故 $f(x)=(x^2+4x+5)(x^2-5x+3)\leq0$ 與 $x^2-5x+3\leq0$ 的解相同

　又 $x^2-5x+3\leq0$ 的解為 $\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}\leq x\leq\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$，得到 $0.697\leq x\leq4.303$

　故選(1)。

2. (5)

　難易度：易

　出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

　目標：等差數列於日常生活的應用

　解析：設此 4 天的日期分別為 a，$a+1$，$a+7$，$a+8$，則 $a+a+1+a+7+a+8=4a+16=64$

　解得 $a=12$，即二月十二日為星期三，因此二月二十七日為星期四，$2+31+30=63$，$63\div7=9$ 餘 0，

　故四月三十日為星期四，可推得五月一日是星期五

　故選(5)。

3. (3)

　難易度：中

　出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

　目標：等差中項與級數和的應用

　解析：設首項為 a_1，公差為 d，則 $a_{2020}=a_1+2019d=2020$

　$S_{2020}=\dfrac{(a_1+a_{2020})\cdot2020}{2}=\dfrac{(a_1+2020)\cdot2020}{2}=2020$

　可得 $a_1=-2018$，$d=2$，所以 $a_n=-2018+2(n-1)=2n-2020$

　$\Rightarrow S_n=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}=n(n-2019)$

　又 $a_n>S_n\Rightarrow 2n-2020>n(n-2019)\Rightarrow n^2-2021n+2020<0$

　$\Rightarrow(n-1)(n-2020)<0\Rightarrow1<n<2020$，共有 2018 個正整數 n

　故選(3)。

4. (4)

　難易度：易

　出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

　目標：能做簡單的對數運算

　解析：首位數字 4，5 所占比例分別為 $\log\left(1+\dfrac{1}{4}\right)$，$\log\left(1+\dfrac{1}{5}\right)$

　所占比例和為 $\log\dfrac{5}{4}+\log\dfrac{6}{5}=\log3-\log2\approx0.4771-0.3010=17.61\ \%\approx18\ \%$

　故選(4)。

5. (2)

難易度：中

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：能理解絕對值的意義

解析：$|a-b|$ 表示數線上 a 與 b 的距離，由此可知題目問的是：

有幾個 x 滿足「x 到 1 的距離加上 x 到 2 的距離」等於

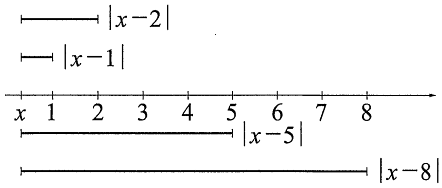
「x 到 5 的距離加上 x 到 8 的距離」？觀察數線可知，

當 $2<x<5$ 時，方程式才可能有解

因此 $x-1+x-2=5-x+8-x$

$\Rightarrow x=4$，原方程式只有一個解

故選(2)。



6. (5)

難易度：難

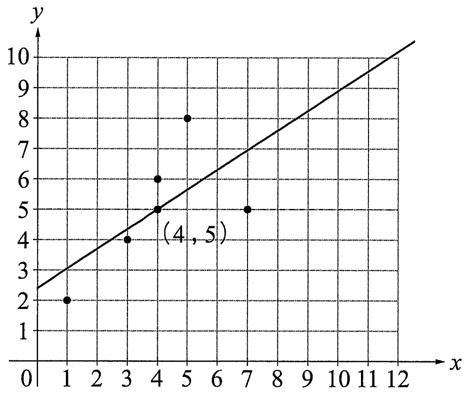
出處：第二冊第四章〈數據分析〉

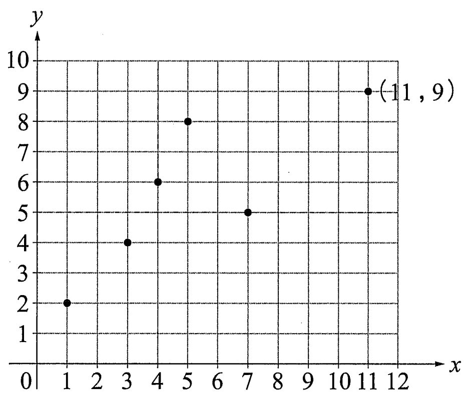
目標：能理解相關係數的概念

解析：若加入的第 6 筆資料為 (1 , 7) 或 (5 , 3) 或 (8 , 5)，可由散佈圖觀察出相關性會變小

若加入的第 6 筆資料為 (4 , 5)，此點剛好是原 5 筆資料的算術平均數，所以相關性不變

因此只需比較原 5 筆資料與加入 (11 , 9) 後之 6 筆資料的相關性大小即可，參考下圖





故選(5)。

二、多選題

7. (2)(4)

難易度：易

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：能理解等差數列與等比數列

解析：(1) $a_{23}=5+(23-1)\times 3=71$

(2) $b_7=2\times 2^6=2^7=128$

(3)(5)共同項為 8、32、128，共三項，而此三項不成等差數列

(4) $a_2=8=b_3$、$a_{10}=32=b_5$ 皆為共同項

故選(2)(4)。

8. (1)(2)(5)

難易度：中

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：能理解指數函數、對數函數的基本運算與其圖形

解析：(1) $f(6)=a^6=3 \Rightarrow \log_a 3=6$，$g(\sqrt{3})=\log_a\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}\log_a 3=\dfrac{1}{2}\times 6=3$

(2) $\dfrac{f(2020)}{f(2010)}\cdot\dfrac{f(99)}{f(109)}=\dfrac{a^{2020}}{a^{2010}}\cdot\dfrac{a^{99}}{a^{109}}=a^{10}\cdot a^{-10}=a^0=1$

(3) $g(2020)-g(2010)=\log_a 2020-\log_a 2010=\log_a\dfrac{2020}{2010}$

$g(109)-g(99)=\log_a 109-\log_a 99=\log_a\dfrac{109}{99}$

因為 $\dfrac{2020}{2010}\neq\dfrac{109}{99}$，故 $g(2020)-g(2010)\neq g(109)-g(99)$

(4)因為 $a>1$，所以 $g(x)=\log_a x$ 為遞增函數

$$x_1\neq x_2,\ g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\log_a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\log_a\sqrt{x_1\cdot x_2}=\frac{1}{2}\log_a(x_1\cdot x_2)$$

$$=\frac{1}{2}(\log_a x_1+\log_a x_2)=\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$$

(5) $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 的圖形對稱於 $y=x$；$y=3x$ 與 $y=\frac{1}{3}x$ 也對稱於 $y=x$

所以當 $y=3x$ 與 $y=f(x)$ 有 m 個交點時，$y=\frac{1}{3}x$ 與 $y=g(x)$ 也有 m 個交點

即 $m=n$，則 $m+n=2m$ 必為偶數

故選(1)(2)(5)。

9. (1)(3)(5)

難易度：中

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：能理解條件機率、獨立事件、交集與聯集

解析：(1) $P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{2}$，$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \frac{P(A\mid B)}{P(B\mid A)}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}\Rightarrow x:y=3:4$$

(2)(3)令 $x=3t$，$y=4t$，則 $P(A\cap B)\le\frac{2}{3}P(A)=2t$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\le 1\Rightarrow 3t+4t-2t\le 1\Rightarrow t\le\frac{1}{5}$$，故 $x\le\frac{3}{5}$，$y\le\frac{4}{5}$

(4)(5)若 A、B 為獨立事件，則 $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

$$\Rightarrow 2t=3t\times 4t\Rightarrow t=\frac{1}{6}\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$，$y=\frac{2}{3}$，$P(A\cap B)=\frac{1}{3}$

故選(1)(3)(5)。

10. (2)(3)(4)

難易度：中

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉、第二冊第三章〈機率〉

目標：能理解題目並計算排列數與機率

解析：(1) (3 , 3 , 1 , 2)、(4 , 4 , 1 , 2)、(5 , 5 , 1 , 2)、(6 , 6 , 1 , 2) 共 4 種

(2) (1 , 1 , 2 , 6)、(3 , 3 , 2 , 6)、(4 , 4 , 2 , 6)、(5 , 5 , 2 , 6)、(1 , 1 , 3 , 5)、(2 , 2 , 3 , 5)、(4 , 4 , 3 , 5)、(6 , 6 , 3 , 5)、(1 , 1 , 4 , 4)、(2 , 2 , 4 , 4)、(3 , 3 , 4 , 4) 共 11 種

(3)承(2)前八種的排列數皆為 $\frac{4!}{2!}=12$，後三種的排列數皆為 $\frac{4!}{2!2!}=6$，所以 $\frac{12\times 8+6\times 3}{6^4}=\frac{114}{6^4}$

(4)直接結束比賽表示出現以下三種狀況：

①「逼機」，排列數為 $\frac{4!}{2!}\times 4=48$

②點數出現十二點，有 (1 , 1 , 6 , 6)，(2 , 2 , 6 , 6)，(3 , 3 , 6 , 6)，(4 , 4 , 6 , 6)，(5 , 5 , 6 , 6) 五種狀況，其排列數為 $\frac{4!}{2!2!}\times 5=30$

③「一色」，排列數為 6

結合以上三種狀況可知帥勛擲出後直接結束遊戲的機率為 $\frac{84}{6^4}$

(5)承(4)結束遊戲帥勛獲勝為出現十二點以及「一色」兩種狀況，機率為 $\frac{36}{6^4}$；傑哥獲勝為出現「逼機」，機率為 $\frac{48}{6^4}$

故選(2)(3)(4)。

11. (2)(3)(5)

難易度：中

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：能理解判別式與實根數量的關係

解析：(1)當 $ax^2+bx+c=(x-1)^2$，此時 $b^2-4ac=0$，$ax^2+bx+c=0$ 有兩相同實根，但 $f(x)=(x-1)^3=0$ 有三重根 1，而不是兩個相異實根

(2)因為 $b^2-4ac>0$，所以 ax^2+bx+c 有兩相異實根。且 $a+b+c\neq0$ 可知 1 不是 ax^2+bx+c 的一個根，故 $f(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)=0$ 共有三個相異實根

(3)若 $b^2-4ac<0$，則對於任意實數 x，當 $a>0$ 時，$ax^2+bx+c>0$ (恆正)；
當 $a<0$ 時，$ax^2+bx+c<0$ (恆負)，因此 $f(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$ 僅有一個實根 1

(4)若 $f(x)=(x-1)^3=(x-1)(x-1)^2$，則 $y=f(x)$ 和 x 軸只有一個交點，但 $ax^2+bx+c=(x-1)^2$，而此時 $b^2-4ac=0$，故此選項未必正確

(5)若 $f(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$ 與 x 軸的交點不只一個，則 $f(x)=0$ 必存在 1 以外的實根
所以 $ax^2+bx+c=0$ 必有實數解，即 $b^2-4ac\geq0$

故選(2)(3)(5)。

12. (2)(5)

難易度：易

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：能理解一些簡單的統計名詞及其觀念

解析：(1)每年度都有一半的人成績達到或高於均標，此資料與該年度題目的難易無關

(2) $52=50+10z\Rightarrow z=0.2>0$，表示皮皮成績優於數學平均成績

(3)順時高中每位球員上場時間資料較集中，標準差較小。
逆時高中每位球員上場時間資料較分散，標準差較大

(4)平均成長率為兩年成長率的幾何平均數
平均成長率$=\sqrt{(1+30\%)(1-30\%)}=\sqrt{(1.3)(0.7)}=\sqrt{0.91}\approx0.95=95\ \%$

(5)分別將數學素養及科學素養兩科得分化為標準化分數 z_1、z_2
得 $z_1=\dfrac{577-531}{80}=\dfrac{46}{80}=\dfrac{23}{40}$，$z_2=\dfrac{559-516}{50}=\dfrac{43}{50}$
$z_2=\dfrac{43}{50}>z_1=\dfrac{23}{40}$，故該學生科學素養排名較數學素養排名佳

故選(2)(5)。

第貳部分：選填題

A. 14

難易度：易

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：線性調分後標準差的變化

解析：標準差會受 2 倍影響，但不受加 10 分影響，所以新的標準差為 $7\times2=14$。

B. 3300

難易度：易

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：算幾不等式

解析：假設箱子的長為 x 公分、寬為 y 公分，則箱子之體積為 $20xy=18000$ 立方公分，因此 $xy=900$
收納箱之表面積為 $(20x)\cdot2+(20y)\cdot2+xy=40x+40y+900=40(x+y)+900$ 平方公分
因為 x，y 皆為非負實數，根據算幾不等式，可得
$\dfrac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}\Rightarrow x+y\geq2\cdot\sqrt{900}=60$
故所求為 $40\cdot60+900=3300$ 平方公分。

C. (4 , 5 , 9 , 1)

難易度：易

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：簡單的對數運算、配方法求最小值

解析：將 (1 , 5)、(3 , 2) 代入方程式可得

$$\begin{cases}5=(\log_3 1)^2-a\log_3 1+b\\2=(\log_3 3)^2-a\log_3 3+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5=0-a\cdot 0+b\\2=1^2-a\cdot 1+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\b=5\end{cases}$$

由 $y=(\log_3 x)^2-4\log_3 x+5=(\log_3 x-2)^2+1$ 可知，當 $\log_3 x=2$ 時，y 有最小值 1

所以當 $x=c=9$ 時，y 有最小值 $d=1$，故序組$(a , b , c , d)=(4 , 5 , 9 , 1)$。

D. -25

難易度：中

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：一元二次方程式的公式解與判別式

解析：因為 $f(x)=(x+1)(x^2+2x+a)=0$ 有三個相異實根，故 $x^2+2x+a=0$ 需有兩相異實根

所以 $4-4a>0\Rightarrow a<1$

$f(x)=(x+1)(x^2+2x+a)=0$ 最大的實根介於 4 和 5 之間

$x^2+2x+a=0$ 中較大的實根 $\dfrac{-2+\sqrt{4-4a}}{2}$ 須滿足 $4<\dfrac{-2+\sqrt{4-4a}}{2}<5$

$\Rightarrow 8<-2+\sqrt{4-4a}<10\Rightarrow 10<\sqrt{4-4a}<12$

$\Rightarrow 100<4-4a<144\Rightarrow 96<-4a<140\Rightarrow -35<a<-24$

根據上述結果，a 的最大整數為 -25。

E. 19

難易度：中

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：等比數列的性質、拋物線的對稱性、餘式定理

解析：令 $f(x)=ax^2+bx+c$，將已知代入可得

$$\begin{cases}f(0)=c \cdots\cdots\cdots\text{①}\\f(1)=a+b+c=3 \cdots\cdots\cdots\text{②}\\f(2)=4a+2b+c \cdots\cdots\cdots\text{③}\\f(-1)=a-b+c=3 \cdots\cdots\cdots\text{④}\end{cases}$$

又 $f(0),f(1),f(2)$ 為等比數列，所以 $f(0)\times f(2)=(f(1))^2$

$\Rightarrow c\times(4a+2b+c)=3^2=9$ ⋯⋯⋯⑤

②－④ $\Rightarrow b=0$ 代入②可得 $c=3-a$

將上述結果代入⑤可得 $(3-a)\times(4a+2\cdot 0+3-a)=9\Rightarrow a(a-2)=0$

因為 $f(x)$ 為二次實係數多項式函數，故 $a=2$，則 $c=1$

所以 $f(x)=2x^2+1$

故 $f(x)=2x^2+1$ 除以 $(x-3)$ 的餘式為 $f(3)=2\times 3^2+1=19$。

F. $\dfrac{2}{5}$

難易度：易

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：條件機率

解析：設染病者比例為 x，則未染病者比例為 $1-x$

染病者驗出陽性的比例為 $\dfrac{1}{4}$，未染病者驗出陽性的比例為 $\dfrac{2}{3}$

所以全體中為染病者且驗出陽性的比例是 $\dfrac{1}{4}x$、染病者且驗出陰性的比例是 $\dfrac{3}{4}x$

而全體中為未染病者且驗出為陽性的比例是 $\dfrac{2}{3}(1-x)$、未染病者且驗出為陰性的比例是 $\dfrac{1}{3}(1-x)$

驗錯 7 成是指將染病者驗出陰性及未染病者驗出陽性，所以可得

$\dfrac{3}{4}x+\dfrac{2}{3}(1-x)=\dfrac{7}{10}\Rightarrow\dfrac{1}{12}x=\dfrac{1}{30}\Rightarrow x=\dfrac{2}{5}$。

G. 1.778

難易度：易

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：機率總和為 1、對數的運算

解析：∵染病後***具傳染性***之比率為***不具傳染性***之比率的 3 倍

則〔$P(A)+P(C)$〕$+P(B)=3P(B)+P(B)=1$

$\Rightarrow P(B)=\dfrac{1}{4} \Rightarrow \log_{256} b=\dfrac{1}{4} \Rightarrow b=4$

又『飛沫傳染』之比率為『接觸傳染』之比率的 2 倍

則 $P(A)+P(C)=2P(C)+P(C)=\dfrac{3}{4} \Rightarrow P(C)=\dfrac{1}{4} \Rightarrow \log_{81} c=\dfrac{1}{4} \Rightarrow c=3$

代回上式得 $P(A)=2P(C)=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \log_{25} a=\dfrac{1}{2} \Rightarrow a=5$

$\log(a\times b\times c)=\log(5\times 4\times 3)=\log 60=\log 10+\log 3+\log 2\approx 1.778$。

H. 150

難易度：難

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：能分類討論問題

解析：一名藥師最多輪值四天，又總共五天每天安排兩人輪值，所以最多兩人輪值四天，最少一人輪值四天

① 兩人輪值四天另一人輪值兩天

$$\underbrace{C^3_1\times C^5_2}_{\text{3 人選 1 人並先選擇值班的兩天}} \times \underbrace{2!}_{\text{剩兩人分別與前 1 人輪值一天，剩下三天兩人共同輪值}} =60\text{ (種)}$$

② 一人輪值四天另外兩人輪值三天

$$\underbrace{C^3_1\times C^5_4}_{\text{3 人選 1 人並先選擇值班的四天}} \times \underbrace{\frac{4!}{2!2!}}_{\text{剩兩人除剩下一天一起輪值，其餘皆與前 1 人分別輪值}} =90\text{ (種)}$$

$60+90=150$(種)。