全國公私立高級中學 109 學年度學科能力測驗第二次聯合模擬考試

數學考科解析

考試日期：109 年 9 月 8~9 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	2	5	3	4	5	15	124	35	24	145	15	1	5	6
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0	0	0	0	9	－	6	4	1	3	6	9	2	2	5
31	32	33	34	35										
4	2	0	8	9										

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. $a_1=1^2=1$，當 $n\ge 2$ 時，
$a_1\times a_2\times\cdots\times a_{n-1}=(n-1)^2\cdots$①，
且 $a_1\times a_2\times\cdots\times a_n=n^2\cdots\cdots\cdots$②，
由②÷①得 $a_n=(\frac{n}{n-1})^2$，則 $a_{11}=(\frac{11}{10})^2=\frac{121}{100}$，
故選(3)。

2. 因 $\log\frac{x}{y}=\log x-\log y=-13.42-(-7.66)=-5.76=-6+0.24$，
又 $\log 1<0.24<\log 2$，所以 $m=1$，$k=-6$，
故 $m+k=-5$，
故選(2)。

3. 因為每項工作只能由 1 人單獨完成，由取捨原理得不同的安排方式為任意方法數扣掉有人沒有分配到工作方法數，則共有 $3^4-C_1^3\times 2^4+C_2^3\times 1^4=81-48+3=36$ 種不同的安排方式，故選(5)。

4. 令 $a=(\frac{2.5}{1.8})^{10}=(\frac{100}{72})^{10}$
$\Rightarrow \log a=\log(\frac{100}{72})^{10}=10(\log 100-\log 72)$
$=10(2-\log 9-\log 8)\approx 1.428=1+0.428$，
且 $\log 2.5=\log(\frac{10}{4})=\log 10-\log 4\approx 0.3980$，
又 $\log 3=0.4771\Rightarrow 0.3980<0.428<0.4771$
$\Rightarrow \log 25<\log a<\log 30$，
所以 $25<a<30$，
故選(3)。

5. 因 $f(x)$ 為奇函數，
所以 $a=-f(\log_2\frac{1}{5})=f(-\log_2\frac{1}{5})=f(\log_2 5)$，
又因 $\log_2 5>\log_2 4.1>\log_2 4=2$，$2^{0.8}<2^1=2$，
即 $2^{0.8}<\log_2 4.1<\log_2 5$，且 $f(x)$ 是嚴格遞增函數，
則 $f(2^{0.8})<f(\log_2 4.1)<f(\log_2 5)$，所以 $c<b<a$，
故選(4)。

6. $x=1+2i\Rightarrow x-1=2i\Rightarrow x^2-2x+5=0$，
令 $f(x)=a(x^2-2x+5)+2$，
則 $f(1+3i)=a[(1+3i)^2-2(1+3i)+5]+2=7$，
$a\times(-5)+2=7\Rightarrow a=-1$
$\Rightarrow f(x)=-(x^2-2x+5)+2=-x^2+2x-3$，
所以 $a+b+c=-2$，
故選(5)。

二、多選題

7. (1) ○：在 $\langle a_n\rangle$ 中，
$a_{n+1}-a_n=[2(n+1)+3]-(2n+3)=2$，
故 $\langle a_n\rangle$ 是公差為 2 的等差數列。
(2) ×：在 $\langle b_n\rangle$ 中，$b_1=5$，$b_2=7$，$b_3=11$ 且 $\frac{b_2}{b_1}\ne\frac{b_3}{b_2}$，
故 $\langle b_n\rangle$ 不是等比數列。
(3) ×：在 $\langle c_n\rangle$ 中，
$c_1=\log 5$，$c_2=\log 7$，$c_3=\log 9$ 且 $\frac{c_2}{c_1}\ne\frac{c_3}{c_2}$，
故 $\langle c_n\rangle$ 不是等比數列。
(4) ×：在 $\langle d_n\rangle$ 中，
$d_1=\log 5$，$d_2=\log 7$，$d_3=\log 11$ 且 $d_2-d_1\ne d_3-d_2$，
故 $\langle d_n\rangle$ 不是等差數列。
(5) ○：承(1)，$\langle a_n\rangle$ 是首項為 5 且公差為 2 的等差數列，
故遞迴關係式為 $\begin{cases}a_1=5\\ a_n=a_{n-1}+2\,(n\ge 2)\end{cases}$。
故選(1)(5)。

8. (1) ○：原式 $\Rightarrow -2\le x-2\le 2\Rightarrow 0\le x\le 4$。
(2) ○：原式 $\Rightarrow x(x-4)\le 0\Rightarrow 0\le x\le 4$。
(3) ×：原式 $\Rightarrow x(x-4)\le 0$ 且 $x\ne 0\Rightarrow 0<x\le 4$。
(4) ○：原式 $\Rightarrow\begin{cases}4-x\le(x+2)^2\\ 4-x\ge 0\\ x+2\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le x^2+5x\\ 4\ge x\\ x\ge -2\end{cases}$
$\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0 \text{ 或 } x\le -5\\ x\le 4\\ x\ge -2\end{cases}\Rightarrow 0\le x\le 4$。
(5) ×：原式 $\Rightarrow 0\le x\le 4$ 或 $x=-1$。
故選(1)(2)(4)。

9. 因 $2-i$ 是實係數方程式 $f(x)=0$ 為的一根，
由虛根成對原理知 $2+i$ 必為另一根，
設第三根為 γ，則必為實根，利用根與係數
$\Rightarrow\begin{cases}(2-i)+(2+i)+\gamma=-a\cdots①\\ (2-i)(2+i)\gamma=-a\cdots\cdots\cdots②\end{cases}$，
由①②可知 $4+\gamma=5\gamma\Rightarrow\gamma=1$，
代入①得 $a=-5$，又實根為 $1\Rightarrow f(1)=0$
$\Rightarrow 1-5+b-5=0$，$b=9$
$\Rightarrow f(x)=x^3-5x^2+9x-5$，所以 $f(2)=8-20+18-5=1$，
故選(3)(5)。

10. (1) ×：僅使用 A 有 $15+11+4=30$ 人，
僅使用 B 有 $10+13+2=25$ 人，
A,B 兩種支付方式都不使用的有 5 人，
所以樣本中 A,B 兩種支付方式都使用者有
$100-30-25-5=40$ 人。
(2) ○：樣本中 A,B 兩種支付方式都使用的機率為 $\frac{40}{100}=0.4$，
所以從樣本中隨機抽選 1 人 A,B 兩種支付方式都使用的機率亦為 0.4。
(3) ×：機率為 $\frac{11+4}{30}\times\frac{13+2}{25}=0.5\times 0.6=0.3$。
(4) ○：由(3)可知，機率為
$0.5\times(1-0.6)+(1-0.5)\times 0.6=0.2+0.3=0.5$。
(5) ×：由(3)可知，機率為 $(1-0.5)\times(1-0.6)=0.2$。
故選(2)(4)。

11. (1) ○：$0.3+x+y=1 \Rightarrow x+y=0.7$。

(2) ×　(3) ×　(4) ○：

$P(A_3|D)=\dfrac{0.5\times0.3}{0.4x+0.3y+0.5\times0.3}=\dfrac{10}{27}$

$\Rightarrow 27\times0.15=10\times(0.4x+0.3y+0.5\times0.3)$

$\Rightarrow 4x+3y=2.55$

$\Rightarrow \begin{cases}x+y=0.7\\4x+3y=2.55\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0.45\\y=0.25\end{cases}$，

故 $P(D)=0.4\times0.45+0.3\times0.25+0.5\times0.3=0.405$。

(5) ○：$P(A_1|D)=\dfrac{0.4\times0.45}{0.4\times0.45+0.3\times0.25+0.5\times0.3}$

$=\dfrac{0.18}{0.405}=\dfrac{4}{9}$。

故選(1)(4)(5)。

12. (1) ○：因迴歸直線必通過(μ_x,μ_y)，

所以 y 對 x 的迴歸直線即為過$(6,2)$，$(3,1)$的直線

則斜率 $m=\dfrac{2-1}{6-3}=\dfrac{1}{3}$。

(2) ×：迴歸直線方程式為 $y-2=\dfrac{1}{3}(x-6)\Rightarrow y=\dfrac{1}{3}x$。

(3) ×：因為 $x'=2x+1$，$y'=-3y+4$，

又 $2\times(-3)<0$，所以 $r'=-r=-1$。

(4) ×：斜率 $m=r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=1\times\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=\dfrac{1}{3}$，

得 $3\sigma_y=\sigma_x$，即 ${\sigma_x}^2>{\sigma_y}^2$。

(5) ○：將 $x=9$ 代入迴歸直線 $y=\dfrac{1}{3}x$，得 $y=\dfrac{1}{3}\times9=3$。

故選(1)(5)。

第貳部分：選填題

A. 原式可化成 $\log_3 5^{x+1}=\log_3 3^{x^2-1}$

$\Rightarrow (x+1)\log_3 5=x^2-1$

$\Rightarrow x^2-(\log_3 5)x-(1+\log_3 5)=0$

$\Rightarrow (x+1)(x-1-\log_3 5)=0$

$\Rightarrow x=-1$ 或 $x=\log_3 15$，

但 $x>0$，則 $x=\log_3 15$，故 $k=15$。

B. ①若甲去，則乙不去，丙一定去，

所以有 $C^5_2\times4!=240$ 種選派方式。

②若甲不去，則丙也不去，

所以有 $C^6_4\times4!=360$ 種選派方式。

故共有 $240+360=600$ 種不同的選派方式。

C. 設甲、乙獲獎的機率均為 p，

由題意知兩人皆未獲獎 $(1-p)(1-p)=1-0.51$，

$\Rightarrow p^2-2p+0.51=0\Rightarrow(p-1.7)(p-0.3)=0$，

所以 $p=0.3$，則甲、乙兩人同時得獎的機率為 $p^2=0.09$。

D. $P=1+C^{12}_1z+C^{12}_2z^2+C^{12}_3z^3+\cdots+C^{12}_{12}z^{12}=(1+z)^{12}$，

$z=-2+i$ 代入，

得 $(-1+i)^{12}=(1-i)^{12}=[(1-i)^2]^6=(-2i)^6=64i^2=-64$。

E. 因 $a_n=\dfrac{(1+2+\cdots+n)(1^2+2^2+\cdots+n^2)}{(1^3+2^3+\cdots+n^3)}$

$=\dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}\times\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2}=\dfrac{2n+1}{3}$。

所以 $a_1+a_4+\cdots+a_{3k+1}+\cdots+a_{109}$

$=1+3+5+\cdots+73=\dfrac{37\times(1+73)}{2}=1369$。

F. 令最後兩天分別使用 a 枚，$4-a$ 枚代幣，其 $0\le a\le4$ 中。

則平均數 $\mu=\dfrac{15}{5}=3$，

標準差 $\sigma=\sqrt{\dfrac{1^2+3^2+7^2+a^2+(4-a)^2}{5}-3^2}$

$=\sqrt{\dfrac{2a^2-8a+75}{5}-3^2}=\sqrt{\dfrac{2(a-2)^2+67}{5}-3^2}$

$\ge\sqrt{\dfrac{22}{5}}$。

故 $m^2=\dfrac{22}{5}$。

G. ①甲單獨一船，$\dfrac{C^6_3\times C^3_3}{2!}\times3!=10\times6=60$。

②甲與其中一人共船，$C^6_1\times C^5_3\times C^2_2\times3!=6\times10\times1\times6=360$。

共有 $60+360=420$ 種。

H. $P(\text{檢驗有感染嫌疑})=\dfrac{2}{100}\times\dfrac{100}{100}+\dfrac{8}{100}\times\dfrac{2}{100}+\dfrac{90}{100}\times\dfrac{0.1}{100}$

$=\dfrac{225}{10000}$。

$P(\text{確實感染}\,|\,\text{檢查感染})=\dfrac{P(\text{確實感染且檢查感染})}{P(\text{檢查感染})}$

$=\dfrac{\dfrac{2}{100}\times\dfrac{100}{100}}{\dfrac{225}{10000}}=\dfrac{200}{225}=\dfrac{8}{9}$。