

臺北區 110 學年度第一學期第一次學科能力測驗

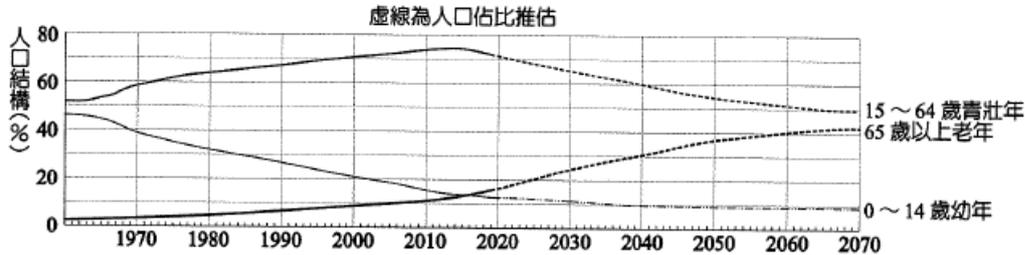
第壹部分：選擇題（占 85 分）



RA289

一、單選題（占 30 分）(1~6 每題 5 分)

1. 下列圖表為國家發展委員會於 2020 年 8 月公告對三階段(0~14 歲幼年、15~64 歲青壯年、65 歲以上老年)在 2020 至 2070 年的人口佔比推估。



國際上將 65 歲以上人口佔總人口比率達到 7%、14%及 20%，分別稱為高齡化社會、高齡社會及超高齡社會。依據上表，推估臺灣何時會進入超高齡社會？

- (1) 2020 年 (2) 2025 年 (3) 2030 年 (4) 2035 年 (5) 2040 年
2. 已知 $2^{2x} = 3$ ，則 $\frac{2^{3x} + 2^{-3x}}{2^x - 2^{-x}}$ 之值為何？(1) $\frac{13}{3}$ (2) $\frac{14}{3}$ (3) $\frac{7}{3}$ (4) 3 (5) 5
3. 已知圓 $C: x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$ 與兩直線 $L_1: x - y + 1 = 0$ 、 $L_2: x - y + 5 = 0$ 分別交於點 A 、 B 與點 C 、 D ，則此四個點所形成的凸四邊形為下列何種形狀？
(1) 平行四邊形 (2) 長方形 (3) 梯形 (4) 菱形 (5) 正方形
4. 由 1, 2, 3, 4, 5, 5 等 6 個數字所形成的六位數中，數字 1 出現在 2 之前，且數字 3 出現在數字 5 之前的六位數有多少個？(例如 135245, 134525)
(1) 60 個 (2) 120 個 (3) 180 個 (4) 240 個 (5) 720 個
5. 設數列 $\{a_n\}$ 滿足前 n 項和 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = f(n-1)$ ，其中 $f(n)$ 為 n 的二次多項式。已知 $a_1 = 3$ ， $a_2 = 6$ ， $a_3 = 10$ ，則 $f(n) = ?$
(1) $n^2 + n + 3$ (2) $n^2 + 2n$ (3) $n^2 + 2$ (4) $n^2 + 5n + 3$ (5) $2n^2 + 4n + 3$
6. 在疫情期間，臺灣某產險公司推出一年期防疫保單，其內容針對法定傳染病，消費者花費 500 元保險費用，只要發生居家隔離、集中隔離、隔離治療等狀況其中一種，且收到政府寄發的隔離通知書者，就可以獲得理賠金額 10 萬元。

參考至 2021 年 2 月 19 日為止，其通報人數及占全臺灣人口比例如下表：

	居家隔離、集中隔離、隔離治療 (收到政府寄發的隔離通知書)	居家檢疫、集中檢疫 (收到政府寄發的檢疫通知書)	通報總人數
人數	約 2 萬人	約 15 萬人	約 17 萬人
比例	$\frac{2}{2300}$	$\frac{15}{2300}$	$\frac{17}{2300}$

發生居家隔離、集中隔離、隔離治療、居家檢疫、集中檢疫等狀況的通報數全臺累計約為 17 萬人(其中包含約 15 萬人居家檢疫與集中檢疫者)，若全臺灣約有 2300 萬人，並以上述數據資料做估計，假設保險公司賣出一百萬份保單，扣除業務行政等費用(占保險費用之 20%)後，則其獲利的期望值最接近多少元？

- (1) 2.5 億元 (2) 3 億元 (3) 3.5 億元 (4) 4 億元 (5) 4.5 億元

二、多選題（占 30 分）(7~12 每題 5 分)

7. 小明與朋友一起搭乘摩天輪，已知摩天輪等速率運轉，轉一圈需 18 分鐘，摩天輪的直徑為 80 公尺，小明 10:00 的時候從摩天輪最低點進入車廂開始搭乘，有關小明所在車廂的高度，試選出正確的選項。

- (1) 10:09 在最高點 (2) 10:07 的高度比 10:12 的高度還高
 (3) 10:04 的高度與 10:14 的高度相同

(4) 10:12 時的高度比 10:03 時的高度還高 $40\sqrt{3}$ 公尺

(5) 10:00 到 10:04 之間上升的高度恰為 10:00 到 10:02 之間上升高度的兩倍

8. 設 a, b, c, d 為實數且滿足 $\log a = 2.1, \log b = 4, 10^c = 3, 10^d = 7$, 試選出正確的選項。
 (1) $a \times b = 10^{8.4}$ (2) $\frac{a}{b} = 10^{-1.9}$ (3) $c + d = \log 21$ (4) $3a > \frac{b}{7}$ (5) $b > a > d > c$

9. 在數線上有三點 $A(a), B(b), P(x)$, 已知 $a > b$ 且 $\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 1$, 試選出正確的選項。

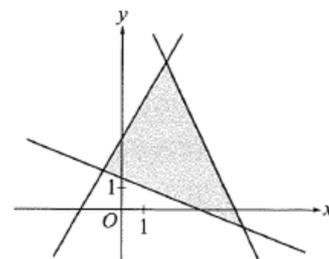
(1) $2|x - a| = |x - b|$ (2) 若 $x = 5$ 且 $b = 7$, 則 $a = 1$ (3) $x > \frac{a+b}{2}$

(4) 若 $c = \frac{2a+3b}{5}$, 則 $c > x$ (5) 若 $|x - a| - |a - b| = |x - b|$, 則 $b = \frac{x+a}{2}$

10. 右圖為二元一次聯立不等式 $\begin{cases} x + ay + b \geq 0 \\ cx + y + d \geq 0 \\ x + ey + f \leq 0 \end{cases}$ 的解區域, 試選出

正確的選項。

(1) $a > 0$ (2) $b > 0$ (3) $c > 0$ (4) $d > -1$ (5) $e < 1$



11. 假設有 10 筆二維數據的資料 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{10}, y_{10})$ 已知

$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 50, y_1 + y_2 + \dots + y_{10} = 20$, X 與 Y 的相關係數為 0.8, 且 y 對 x 的最適合直線通過點 $(6, 5)$ 。

令 $x'_i = \frac{x_i - 5}{\sigma_x}, y'_i = \frac{y_i - 2}{\sigma_y}$ 其中 $i = 1, 2, \dots, 10$ 。

若 σ_x, σ_y 分別為 x 數據、 y 數據之標準差, 試選出正確的選項。

(1) y 對 x 的最適合直線斜率為 3 (2) 數據 (x_i, y_i) 必在直線 $y = 3x - 13$ 上

(3) y' 對 x' 的最適合直線斜率為 0.8 (4) $(x'_1)^2 + (x'_2)^2 + \dots + (x'_{10})^2 = 10$

(5) x 數據的標準差大於 y 數據的標準差

12. 右圖為小華利用所學的多項式函數設計的酒瓶造型, 已知他利用了 2 個三次函數 $y = g(x)$ 及 $y = f(x)$, 1 個二次函數 $y = h(x)$ 與直線 $y = 10$ 的四個部分圖形結合而成圖形 Γ , 其中

$(-2, \frac{17}{4})$ 與 $(4, \frac{21}{4})$ 分別為三次函數 $y = g(x)$ 及 $y = f(x)$ 的對稱中心

, 且 $(-4, \frac{9}{4})$ 與 $(5, \frac{9}{4})$ 為二次函數 $y = h(x)$ 和三次函數

$y = g(x)$ 及 $y = f(x)$ 的交點, 試選出正確的選項。

(1) 點 $(0, \frac{25}{4})$ 亦在圖形 Γ 上 (2) 已知圖形 Γ 的最低點在 x 軸上, 則最低點坐標為 $(1, 0)$

(3) $f(x) - \frac{9}{4}$ 有因式 $x - 5$ (4) 若 $f(x)$ 的最高次項係數越小, 則 $y = f(x)$ 的圖形會越接近鉛直線

(5) 已知 $g(x)$ 的最高次項係數為 1, 則 $g(x) = (x+2)^3 - 3(x+2) + \frac{17}{4}$

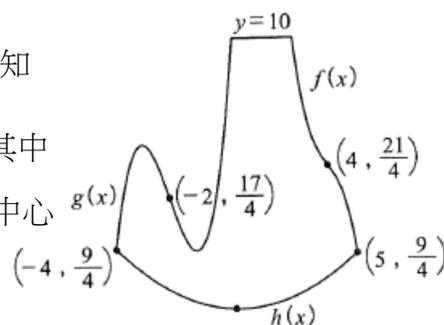


圖 Γ

三、選填題 (占 25 分) (13~17 每題 5 分)

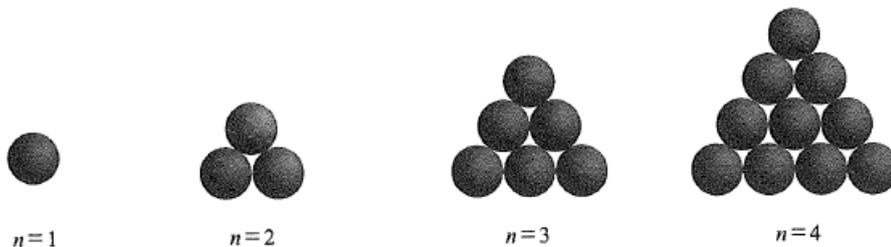
13. 已知在極坐標平面上, O 為極點(原點), A, B 兩點的極坐標分別為 $A[2, 15^\circ], B[3, 135^\circ]$, 則 A, B 兩點的距離 $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡根式)

14. 一袋中有編號1~10號的紅色球10顆與編號1~5號的藍色球5顆。假設每顆球被取出的機會均等，若從袋中一次取出2顆球，則取出顏色相異或號碼數乘積為奇數的機率為_____。(化為最簡分數)
15. 若實係數三次多項式不等式 $f(x) > 0$ ，其解的範圍為 $-5 < x < -2$ 或 $-2 < x$ 。已知 $f(x)$ 的最高次項係數為1，若 $f(x)$ 除以 $x^2 + 4x + 3$ 的餘式為 $ax + b$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。
16. 坐標平面上， $A(4, 3)$ ，動點 P 在 x 軸上，動點 Q 在直線 $y = x$ 上，則線段長度和 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA}$ 的最小值為_____。(化為最簡根式)
17. 小明乘坐熱氣球飛到空中一點 D ，此時俯視水平地面上相異三點 A 、 B 、 C ，發現三點的俯角皆為 60° 。若已知 $\overline{AB} = \overline{AC} = 30$ 公尺， $\overline{BC} = 40$ 公尺，則熱氣球 D 點的高度為_____公尺。(化為最簡根式)

第貳部分：混合題（占 15 分）

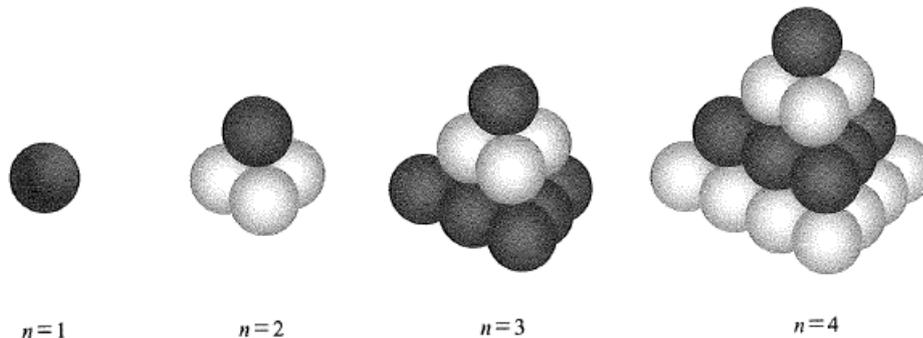
第 18. 至 19. 題為題組

正整數中有一些有趣的數列與幾何圖形有關，例如三角形數與四面體數。如下圖所示：



若能將大小相同的球，排列成正三角形的形狀，則此時所需球的個數，稱為三角形數。令 a_n 為排列成邊長為 n 顆球的正三角形所需球的個數，則 $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 6, a_4 = 10, \dots$ 。

同理，如下圖所示，若能將大小相同的球，堆疊成正四面體的形狀，此時所需球的個數，稱為四面體數。



若要堆出邊長為 n 顆球的正四面體，方式為最底層先排成邊長為 n 顆球的正三角形，其上一層再排成邊長為 $n-1$ 顆球的正三角形，依此方式堆疊至最上層是 1 顆球。

令 b_n 為堆疊出邊長為 n 顆球的正四面體所需球的個數，則 $b_1 = 1, b_2 = 4, b_3 = 10, b_4 = 20, \dots$ 。

請回答下列問題：

18. 有關三角形數所形成的數列 $\langle a_n \rangle$ 與四面體數所形成的數列 $\langle b_n \rangle$ ，試選出正確的選項。
(多選題，5 分)

(1) $a_5 = 15$ (2) $a_{n+1} - a_n = n$ (3) $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (4) $b_5 - b_4 = 10$ (5) $b_5 = 35$

19. 試求出數列 $\langle b_n \rangle$ 的一般項 b_n (以 n 的多項式表示) 並且說明之。(10 分)

RA289 臺北區 110 學年度第一學期第一次學科能力測驗

參考答案

選擇題：1. (2) 2. (2) 3. (3) 4. (1) 5. (5) 6. (2) 7. (1)(2)(3) 8. (2)(3)(5) 9. (2)(3)(5)
10. (2)(3)(5) 11. (1)(3)(4) 12. (1)(3)(5)

選填題：13. $\sqrt{19}$ 14. $\frac{3}{5}$ 15. (1,5) 16. $5\sqrt{2}$ 17. $9\sqrt{15}$

混合題：18. (1)(3)(5) 19. $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$