數學考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(2)	(2)	(3)	(1)	(5)	(2)	(1)(2)(3)
8.	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**		
(2)(3)(5)	(2)(3)(5)	(2)(3)(5)	(1)(3)(4)	(1)(3)(5)		

第壹部分、選擇題

一、單選題

1. (2)

　出處：第二冊〈數據分析〉

　目標：圖表的數據分析

　解析：觀察圖表，

　　65 歲老年人口佔比約於 2025 年達 20 %

　　故選(2)。

2. (2)

　出處：第一冊〈指數、對數〉

　目標：指數律

　解析：$\dfrac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^{x}-2^{-x}}=\dfrac{2^{4x}+2^{-2x}}{2^{2x}-1}=\dfrac{3^2+\frac{1}{3}}{3-1}=\dfrac{14}{3}$

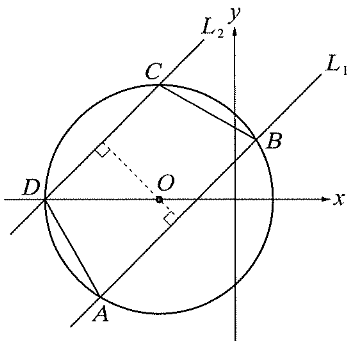
　　故選(2)。

3. (3)

　出處：第一冊〈直線與圓〉

　目標：利用點到直線的距離判別四邊形形狀

　解析：$C：x^2+y^2+4x-5=0 \Rightarrow (x+2)^2+y^2=9$，可知圓 C 的圓心 $O(-2, 0)$，半徑 $r=3$



　　$d(O, L_1)=\dfrac{|-2+1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，

　　$d(O, L_2)=\dfrac{|-2+5|}{\sqrt{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$，

　　因為 $d(O, L_1)<d(O, L_2)$，所以 $\overline{AB}>\overline{CD}$

　　又 $L_1 // L_2$，故 A、B、C、D 四個點所形成的凸四邊形為梯形

　　故選(3)。

4. (1)

　出處：第二冊〈排列組合與機率〉

　目標：有系統的計數，不盡相異物排列

　解析：$4\ \underbrace{\boxed{1}\boxed{2}}_{\text{視為同物}}\ \underbrace{3\ 5\ 5}_{\text{視為同物}}：\dfrac{6!}{2!3!}=60$

　　故選(1)。

5. (5)

　出處：第一冊〈多項式函數〉、第二冊〈數列與級數〉

　目標：數列與級數、二次函數概念的連結與計算

　解析：令 $f(n)=an^2+bn+c$

　　因為 $a_1=3$，$a_2=6$，$a_3=10$，則

$$\begin{cases}a_1=f(0)\\a_1+a_2=f(1)\\a_1+a_2+a_3=f(2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3=c\\3+6=a+b+c\\3+6+10=4a+2b+c\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=4\\c=3\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(n)=2n^2+4n+3$$

　　故選(5)。

6. (2)

　出處：第二冊〈數據分析〉

　目標：期望值

　解析：一份保單的期望值為

$$\frac{2}{2300}\times(500-100000)+\left(1-\frac{2}{2300}\right)\times500-500\times20\ \%$$

　　≈ 313

　　因此，保險公司賣出一百萬份保單獲利的期望值約為 $313\times10^6=3.13\times10^8$，較接近 3 億元

　　故選(2)。

二、多選題

7. (1)(2)(3)

　出處：第二冊〈三角比〉

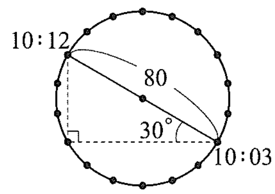
　目標：三角比

　解析：(1) ○：10：09 轉半圈，恰在最高點

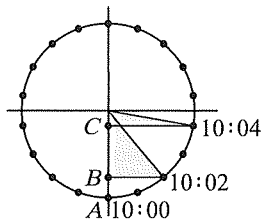
　　(2) ○：10：07 是最高點 10：09 的 2 分鐘前，
　　　10：12 是 10：09 的 3 分鐘之後，
　　　越接近 10：09 越高，
　　　故 10：07 的高度比 10：12 的高度還高

　　(3) ○：10：04 為最高點 10：09 的 5 分鐘前，
　　　10：14 為最高點 10：09 的 5 分鐘後，
　　　因此兩者的高度相同

　　(4) ✕：10：12 時的高度比 10：03 時的高度還高
　　　$80\times\sin 30^\circ=40$ 公尺，如下圖



　　(5) ✕：當角度變為兩倍時，$\overline{AC}\neq2\overline{AB}$，如下圖



　　故選(1)(2)(3)。

8. (2)(3)(5)

　出處：第一冊〈指數、對數〉

　目標：熟悉指數與常用對數的定義與運算

解析：$\log a=2.1 \Leftrightarrow a=10^{2.1}$
$\log b=4 \Leftrightarrow b=10^{4}$

(1)╳：$a\times b=10^{2.1}\times 10^{4}=10^{6.1}$

(2)○：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{10^{2.1}}{10^{4}}=10^{-1.9}$

(3)○：$10^{c+d}=10^{c}\times 10^{d}=21$，則 $c+d=\log 21$

(4)╳：$3a=3\times 10^{2.1}\approx 300$

$\dfrac{b}{7}=\dfrac{10^{4}}{7}\approx 1428$，故 $3a<\dfrac{b}{7}$

(5)○：當 n 越大時，$\log n$ 與 10^{n} 亦越大

所以 $b>a>d>c$

故選(2)(3)(5)。

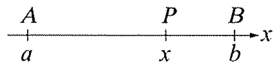
9. (2)(3)(5)

出處：第一冊〈數與式〉

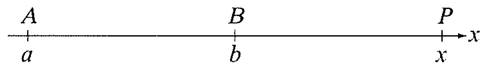
目標：能了解絕對值的意義與分點公式

解析：已知 $a<b$ 且 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:1$，有兩種情況

Case 1：$P(x)$ 點介於 $A(a)$、$B(b)$ 兩點之間



Case 2：$P(x)$ 點在點 $B(b)$ 右側



(1)╳：應改為 $|x-a|=2|x-b|$

(2)○：若 $x=5$ 且 $b=7$，則為 Case 1 之情形，

配合 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:1$ 可推論 $a=1$

(3)○：Case1 時，由內分點公式可得

$x=\dfrac{a+2b}{3}=\dfrac{2a+4b}{6}>\dfrac{3a+3b}{6}=\dfrac{a+b}{2}$

Case 2 時，顯然正確

(4)╳：Case 1 時，由內分點公式可得

$x=\dfrac{a+2b}{3}=\dfrac{5a+10b}{15}>\dfrac{6a+9b}{15}=c$

Case 2 時，顯然 $x>c$

(5)○：若 $|x-a|-|a-b|=|x-b|$，

由絕對值的意義可知為 Case 2，此時

$\overline{AB}:\overline{BP}=1:1$，

故點 $B(b)$ 為 $A(a)$、$P(x)$ 兩點的中點，

即 $b=\dfrac{x+a}{2}$

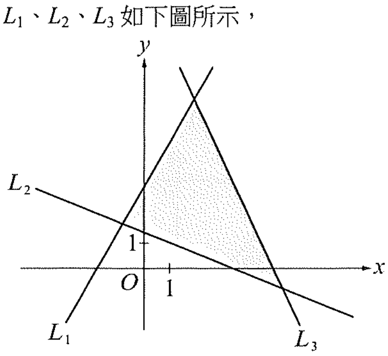
故選(2)(3)(5)。

10. (2)(3)(5)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：判別二元一次不等式的圖形

解析：假設 L_1、L_2、L_3 如下圖所示，



$x+ay+b\geq 0$ 表示在直線的右半平面，

$cx+y+d\geq 0$ 表示在直線的上半平面，

$x+ey+f\leq 0$ 表示在直線的左半平面，

因此 $cx+y+d=0$ 為直線 L_2，

$x+ey+f=0$ 為直線 L_3，

$x+ay+b=0$ 為直線 L_1

(1)╳：由圖形知 $x+ay+b\geq 0$ 在直線的下半平面

$\therefore a<0$

(2)○：承(1)，原點 $(0,0)$ 在直線 L_1 的右半平面，

即 $(0,0)$ 滿足 $x+ay+b\geq 0$

$\Rightarrow b>0$

(3)○：由圖形知 $cx+y+d\geq 0$ 在直線的右半平面

$\therefore c>0$

(4)╳：直線 L_2：$cx+y+d=0$ 與 y 軸的交點為 $(0,-d)$

$-d>1\Rightarrow d<-1$

(5)○：$x+ey+f\leq 0$ 表示在直線 L_3 的左半平面，同時也是下半平面 $\Rightarrow e>0$

直線 L_3：$x+ey+f=0$ 的斜率 $\dfrac{-1}{e}<-1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{e}>1\Rightarrow e<1$

故選(2)(3)(5)。

11. (1)(3)(4)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：相關係數、標準化數據、最適合直線的性質

解析：(1)○：依題意知 $\mu_x=\dfrac{50}{10}=5$，$\mu_y=\dfrac{20}{10}=2$，

且 y 對 x 的最適合直線必通過 (μ_x,μ_y)，

即所求最適合直線通過 $(6,5)$ 與 $(5,2)$ 兩點，

利用兩點求直線方程式為

$y-2=\dfrac{5-2}{6-5}(x-5)\Rightarrow y=3x-13$，

故斜率為 3

(2)╳：承(1)，最適合直線為 $y=3x-13$，

但相關係數為 0.8，

故 (x_1,y_1) 不一定在最適合直線上

(3)○：標準化數據 y' 對 x' 的最適合直線斜率等於相關係數 0.8

(4)○：標準化後數據 $\sigma_x'=1$

$\Rightarrow \sqrt{\dfrac{(x_1')^2+(x_2')^2+\cdots\cdots+(x_{10}')^2}{10}-0^2}=1$

$\Rightarrow (x_1')^2+(x_2')^2+\cdots\cdots+(x_{10}')^2=10$

(5)╳：最適合直線斜率 $=3=(0.8)\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$

$\Rightarrow \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}>1$

$\Rightarrow \sigma_x<\sigma_y$

故選(1)(3)(4)。

12. (1)(3)(5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：能了解多項式函數圖形的意義

解析：(1) ○：三次函數 $y=g(x)$ 的對稱中心點為 $\left(-2\ ,\ \dfrac{17}{4}\right)$

且過點 $\left(-4\ ,\ \dfrac{9}{4}\right)$，可得點 $\left(0\ ,\ \dfrac{25}{4}\right)$ 亦在圖形上

(2) ╳：二次函數 $y=h(x)$ 通過點 $\left(-4\ ,\ \dfrac{9}{4}\right)$ 與點 $\left(5\ ,\ \dfrac{9}{4}\right)$，則對稱軸為 $x=\dfrac{1}{2}$

(3) ○：函數 $y=f(x)$ 過點 $\left(5\ ,\ \dfrac{9}{4}\right)$，可知 $y=f(x)-\dfrac{9}{4}$ 必過點 $(5\ ,0)$，即 $y=f(x)-\dfrac{9}{4}$ 有因式 $x-5$

(4) ╳：由圖形可知 $f(x)$ 的領導係數小於 0，當領導係數越小時，圖形往左上升、往右下降的速度越快

(5) ○：設 $y=g(x)=(x+2)^3+t(x+2)+\dfrac{17}{4}$，代入點 $\left(0\ ,\ \dfrac{25}{4}\right)$ 解得 $t=-3$

故選(1)(3)(4)(5)。

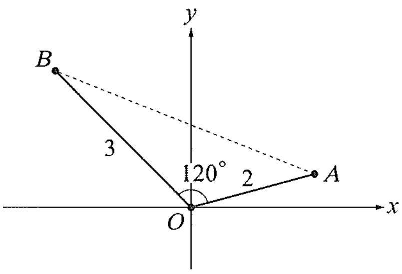
三、選填題

13. $\sqrt{19}$

出處：第二冊〈三角比〉

目標：餘弦定理

解析：觀察△AOB 圖形，已知 $\angle AOB=120^\circ$，



利用餘弦定理

$\overline{AB}^2=2^2+3^2-2\cdot 2\cdot 3\cdot\cos 120^\circ=19$

$\Rightarrow \overline{AB}=\sqrt{19}$。

14. $\dfrac{3}{5}$

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：取捨原理、複合事件的機率性質

解析：所求 $=P$(顏色相異)$+P$(號碼乘積為奇數)$-P$(顏色相異且號碼乘積為奇數)

$$=\frac{C_1^{10}\cdot C_1^5+C_2^8-C_1^5\cdot C_1^3}{C_2^{15}}$$

$$=\frac{3}{5}\text{。}$$

15. $(1\ ,5)$

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：利用已知不等式範圍找出符合的多項式，並利用多項式除法原理(餘式定理)求餘式

解析：利用不等式解的範圍可得

$f(x)=1(x+5)(x+2)^2$

$=(x^2+4x+3)q(x)+r(x)$

$=(x+1)(x+3)q(x)+r(x)$

再利用除法或餘式定理求出餘式 $r(x)=x+5$

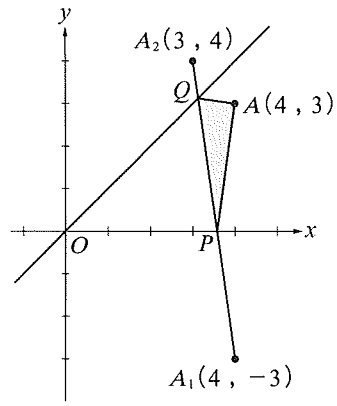
故數對 $(a\ ,b)=(1\ ,5)$。

16. $5\sqrt{2}$

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：利用對稱點求最短距離

解析：



先作 $A(4\ ,3)$ 對 x 軸的對稱點得 $A_1(4\ ,-3)$，

再作 $A(4\ ,3)$ 對直線 $y=x$ 的對稱點得 $A_2(3\ ,4)$，

連接 $\overline{A_1A_2}$，分別與 x 軸交於點 P，與直線 $y=x$ 交於點 Q，

此時 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA}$ 有最小值為

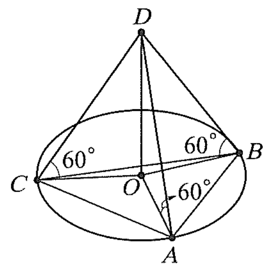
$\overline{A_1A_2}=\sqrt{1^2+7^2}=5\sqrt{2}$。

17. $9\sqrt{15}$

出處：第二冊〈三角比〉

目標：利用正弦定理處理三角測量問題

解析：如下圖，設 D 在地面的投影點為 O，點 O、A、B、C 皆在水平地面上



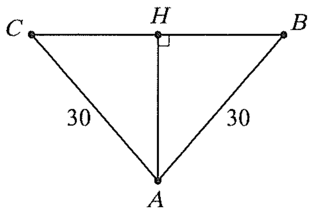
因 A、B、C 三點的俯角皆同(相當於 A、B、C 三點仰望熱氣球 D 的仰角皆同)，

所以 $\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}$，

即點 O 為△ABC 的外心，

且 $\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}$ 為△ABC 的外接圓半徑 R

△ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=30$ 公尺，$\overline{BC}=40$ 公尺，



$\overline{AH}=10\sqrt{5}$，$\sin B=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，

$\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}=2R\Rightarrow R=9\sqrt{5}$

熱氣球高度 $\overline{OD}=R\times\tan 60^\circ$

$=9\sqrt{5}\times\sqrt{3}=9\sqrt{15}$。

第貳部分、混合題

18. (1)(3)(5)

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：觀察數列的規律與特性

解析：(1)○：$a_5=1+2+3+4+5=15$

(2)╳：$a_{n+1}-a_n=n+1$

(3)○：$a_n=1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

(4)╳：$b_5-b_4=a_5$ 等於邊長為 5 的三角形數，即 15

(5)○：若要堆出邊長為 5 的正四面體，方式為最底層先排出邊長為 5 的正三角形，其上一層再排成邊長為 4 的正三角形，依此方式堆疊至最上層是 1 顆球，因此

$b_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$

$=1+3+6+10+15=35$

故選(1)(3)(5)。

19. $\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$，說明略

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：利用數列的規律並求和

解析：

$$\begin{array}{rl} & b_1=a_1\\ & b_2=b_1+a_2\\ & b_3=b_2+a_3\\ & \vdots\\ +) & b_n=b_{n-1}+a_n\\ \hline & b_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n \end{array}$$

$=\dfrac{1\times2}{2}+\dfrac{2\times3}{2}+\cdots\cdots+\dfrac{n(n+1)}{2}$

$=\dfrac{1\times(1+1)}{2}+\dfrac{2\times(2+1)}{2}+\dfrac{3\times(3+1)}{2}+\cdots\cdots+\dfrac{n^2+n}{2}$

$=\dfrac{1}{2}[(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)+(1+2+3+\cdots\cdots+n)]$

$=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\dfrac{n(n+1)}{2}\right]$

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$。

〈另解〉

觀察數列 $b_1=1$，$b_2=4$，$b_3=10$，$b_4=20$，

猜測 $b_n=\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

由題目之敘述知數列〈b_n〉滿足遞迴式 $b_n=b_{n-1}+a_n$

接著用數學歸納法證明 $b_n=\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ 對任意自然數 n 皆成立

(1)當 $n=1$，$b_1=1=\dfrac{1\times2\times3}{6}$ 成立

(2)設當 $n=k$ 時，$b_k=\dfrac{1}{6}k(k+1)(k+2)$ 成立，

則當 $n=k+1$ 時，

$b_{k+1}=b_k+a_{k+1}=\dfrac{k(k+1)(k+2)}{6}+\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$=\dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$，

則當 $n=k+1$，原式亦成立。

由數學歸納法得知，$b_n=\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ 對任意自然數 n 皆成立。

◎評分原則

$$\begin{array}{rl} & b_1=a_1\\ & b_2=b_1+a_2\\ & b_3=b_2+a_3\\ & \vdots\\ +) & b_n=b_{n-1}+a_n\\ \hline & b_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n \end{array}$$
(2 分)

$=\dfrac{1\times2}{2}+\dfrac{2\times3}{2}+\cdots\cdots+\dfrac{n(n+1)}{2}$ (2 分)

$=\dfrac{1\times(1+1)}{2}+\dfrac{2\times(2+1)}{2}+\dfrac{3\times(3+1)}{2}+\cdots\cdots+\dfrac{n^2+n}{2}$

$=\dfrac{1}{2}[(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)+(1+2+3+\cdots\cdots+n)]$ (2 分)

$=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\dfrac{n(n+1)}{2}\right]$ (2 分)

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$。 (2 分)

〈另解〉

觀察數列 $b_1=1$，$b_2=4$，$b_3=10$，$b_4=20$，

猜測 $b_n=\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ (2 分)

由題目之敘述知數列〈b_n〉滿足遞迴式 $b_n=b_{n-1}+a_n$ (2 分)

接著用數學歸納法證明 $b_n=\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ 對任意自然數 n 皆成立

(1)當 $n=1$，$b_1=1=\dfrac{1\times2\times3}{6}$ 成立 (1 分)

(2)設當 $n=k$ 時，$b_k=\dfrac{1}{6}k(k+1)(k+2)$ 成立， (1 分)

則當 $n=k+1$ 時，

$b_{k+1}=b_k+a_{k+1}=\dfrac{k(k+1)(k+2)}{6}+\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$=\dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$，

則當 $n=k+1$，原式亦成立。 (3 分)

由數學歸納法得知，$b_n=\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ 對任意自然數 n 皆成立。 (1 分)