

111 學年度全國高級中學學科能力測驗模擬考試(高二 111-R1)

第壹部分：選擇題(占 90 分)



一、單選題(占 30 分)

1. 對於不等式 $\sqrt{n^2+n} < n+1$ (n 為正整數)，漢霖用數學歸納法證明的過程如下：

- ① 當 $n=1$ 時， $\sqrt{1^2+1} < 1+1$ ，不等式成立。
② 假設當 $n=k$ (k 為正整數) 時，不等式成立，即 $\sqrt{k^2+k} < k+1$
則當 $n=k+1$ 時， $\sqrt{(k+1)^2+(k+1)} = \sqrt{k^2+3k+2} < \sqrt{(k^2+3k+2)+(k+2)}$
 $= \sqrt{(k+2)^2} = k+2 = (k+1)+1$

所以當 $n=k+1$ 時，不等式成立。由數學歸納法得證。

關於上述數學歸納法的證明過程，下列選項何者正確？

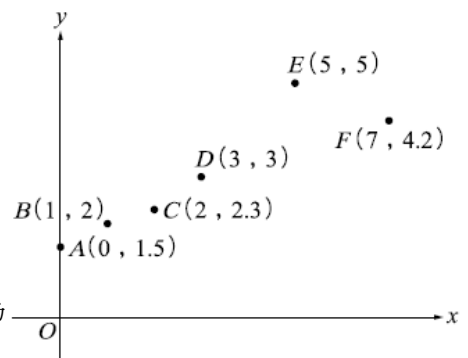
- (1) 過程全部正確 (2) $n=1$ 的檢驗不正確 (3) 當 $n=k$ 時的假設不正確
(4) 從 $n=k$ 到 $n=k+1$ 的推理不正確 (5) 題目不正確，無法證出
2. 若 $a > b > 0$ ，則下列哪一個不等式必成立？
(1) $\frac{b}{a} > \frac{b+1}{a+1}$ (2) $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$ (3) $a + \frac{1}{a} > b + \frac{1}{b}$ (4) $a - \frac{b}{a} > b - \frac{a}{b}$ (5) $\frac{2a+b}{a+2b} > \frac{a}{b}$
3. 圍棋盒子中有多粒黑子和白子共 30 粒，假設每粒棋子被取出的機會均等，已知從中取出 2 粒都是黑子的機率為 $\frac{8}{29}$ ，則下列敘述何者正確？
(1) 黑子跟白子一樣多 (2) 白子比黑子多 2 粒 (3) 拿到 2 粒都是白子的機率為 $\frac{21}{29}$
(4) 拿到 2 粒都是白子的機率小於 $\frac{1}{5}$ (5) 拿到一黑一白的機率大於拿到 2 粒為同色的機率
4. 已知等差數列 $\{a_n\}$ ，滿足 $a_{2023} + a_{2024} < 0$ ， $a_{2023} \cdot a_{2024} < 0$ ，且數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項和 S_n 有最大值，則當 S_n 有最大值時滿足條件的最小正整數 n 值為何？
(1) 4047 (2) 4046 (3) 4045 (4) 4044 (5) 4043
5. 已知二次函數 $f(x) = (x-m)(x-n) + 2023$ ，其中 $n > m$ ，且 α, β ($\alpha < \beta$) 是方程式 $f(x) = 0$ 的兩個實數解，則實數 α, β, m, n 的大小關係為以下何者？
(1) $\alpha < m < n < \beta$ (2) $m < \alpha < n < \beta$ (3) $m < \alpha < \beta < n$ (4) $\alpha < m < \beta < n$ (5) $\alpha < \beta < m < n$
6. 若 $\triangle ABC$ 中， $\angle A, \angle B, \angle C$ 的對邊邊長分別為 a, b, c 。已知 $a \sin A - b \sin B = 4c \sin C$ 且 $\cos A = -\frac{1}{4}$ ，則 $\frac{b}{c} = ?$ (1) 6 (2) $\frac{1}{6}$ (3) 5 (4) $\frac{1}{5}$ (5) 4

二、多選題(占 30 分)

7. 已知 $|x+y| \leq 2$ ， $|x-y| \leq 1$ ，則 $3x-y$ 的值可能為何？

- (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5 (5) 6

8. 漢霖用收集到的 6 組成對資料 (x_i, y_i) ，其中 $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$ ，製作成如右圖所示的散布圖(點旁邊的資料為該點坐標)，並由最小平方方法計算得到這 6 組資料的最適直線 L_1 的方程式為 $y = b_1x + a_1$ ，相關係數為 r_1 。將 E 點去掉後，再用剩下的 5 組資料計算得到最適直線 L_2 的方程式為 $y = b_2x + a_2$ ，相關係數為 r_2 ，則下列選項哪些正確？



- (1) $r_1 > 0, r_2 > 0$ (2) $r_1 > r_2$ (3) $b_1 > 0, b_2 > 0$ (4) $b_1 > b_2$ (5) L_1 過 D 點

9. 關於三次多項式函數 $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ ，其中 a, b, c, d 為實數，請選出正確的選項。(1) 序組 $(a, b, c, d) = (1, 6, 9, 8)$
 (2) $f(0.98) \approx 7.82$ (四捨五入取至小數點後第二位) (3) $y = f(x)$ 圖形的對稱中心為 $(1, 8)$
 (4) 局部看 $y = f(x)$ 在 $x = -1$ 附近的一次近似為 $y = 9x - 1$
 (5) 將 $y = f(x)$ 圖形向左平移 2 單位，再向下平移 3 單位後得到的圖形其對稱中心為 $(-3, 3)$

10. 在 $\triangle ABC$ 中， D 為 \overline{AB} 上一點，且 $\overline{AD} = 5$ ， $\overline{BD} = 3$ 。若 $\overline{BC} = 2\overline{CD}$ ， $\cos \angle CDB = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ ，

則下列選項哪些正確？ (1) $\sin \angle CDB = \frac{3}{10}$ (2) $\triangle ABC$ 面積為 8

(3) $\triangle ABC$ 周長為 $8 + 4\sqrt{5}$ (4) $\triangle ABC$ 為等腰三角形 (5) $\triangle ABC$ 為鈍角三角形

11. 新冠肺炎疫情期間，按照防疫要求，學生在進校時必須排隊接受體溫檢測。某校統計了某日早晨學生到校情況，發現從 7:00 開始，在校門口等待體溫檢測的學生人數 y (單位：人) 會隨時間 x (單位：分鐘) 的變化滿足二次函數 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ (x 為整數)，且 $f(0) = 34$ ， $f(32) = 34$ ， $f(4) = 90$ 。下列敘述哪些正確？ (1) $a + b + c < 50$
 (2) 校門口排隊等待體溫檢測的學生人數最多時為 7 點 15 分
 (3) 校門口排隊等待體溫檢測的學生人數最多時小於 160 人
 (4) 學生全部進校的時間為 7 點 34 分
 (5) 如果每分鐘可以多通過 2 人，則所有學生能夠在 7 點 30 分完成進校

12. 已知直線 $L: ax + by - r^2 = 0$ 與圓 $C: x^2 + y^2 = r^2$ ， A 點坐標為 (a, b) 。下列敘述哪些正確？
 (1) 若點 A 在圓 C 上，則直線 L 與圓 C 相切 (2) 若點 A 在圓 C 內，則直線 L 與圓 C 相交
 (3) 若點 A 在圓 C 外，則直線 L 與圓 C 不相交 (4) 若點 A 在直線 L 上，則直線 L 與圓 C 相切
 (5) 若點 A 在圓 C 上，則點 A 必在直線 L 上

三、選填題(占 30 分)

13. 若 $2^a = 5^b$ ，且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$ ，則 $2^a \times 5^b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 若把英文單字“happy”的字母順序寫錯了，則可能出現的錯誤共有 種。

15. 已知圓 $C: x^2 + y^2 = 10$ ，且直線 $L: ax + by = 2a - b$ ($a, b \in R$) 與圓 C 的交點分別為 M, N ，當直線 L 被圓 C 截得的弦長最小時， $\overline{MN} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡根式)

16. 已知等比數列 $\langle a_n \rangle$ 的每一項均為正數，前 n 項和為 S_n ，且 $-a_1, S_2, S_3$ 成等差數列。若存在兩項 a_m, a_k 使得 $\sqrt{a_m \cdot a_k} = 8a_1$ ，則 $m + k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

17. 為提升學生的科學素養，學校開設了物理、化學、生物等大師講座，講座海報如右圖所示。漢霖計畫用三天時間參加三場不同科別的大師講座，則共有 種選擇方案。

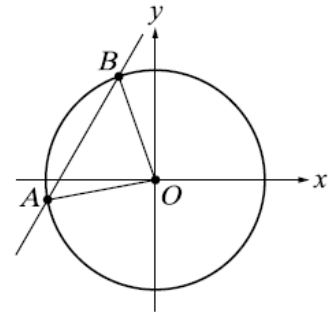
大師講座

科學是永無止境的
它是一個永恆之謎

2023.2.20 ~ 2023.2.24
每日 19:00 ~ 21:00

2.20	物理 (演藝廳 1)
	化學 (演藝廳 2)
2.21	物理 (演藝廳 1)
2.22	化學 (演藝廳 1)
	生物 (演藝廳 2)
2.23	化學 (演藝廳 1)
	生物 (演藝廳 2)
2.24	生物 (演藝廳 1)

18. 已知直線 $L: y = \sqrt{3}x + b$ 圓 $C: x^2 + y^2 = 16$ 交於 A, B 兩點，且 $\angle AOB$ 為銳角(其中 O 為坐標原點)。若 b 為正整數，則所有符合條件的 b 值之和為_____。



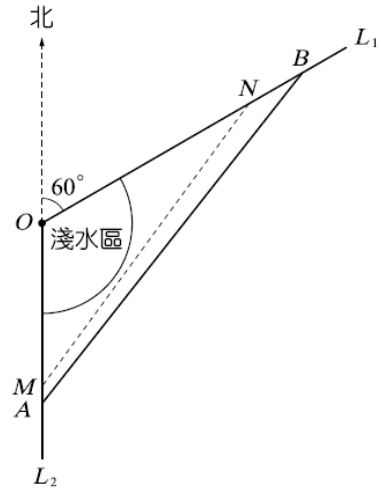
第貳部分：混合題或非選擇題(占 10 分)

19-20 題為題組

高譚市港灣的平面示意圖如右圖所示，點 O, A, B 分別是海岸線 L_1, L_2 上的三個鄉鎮， A 位於 O 的正南方向 6 公里處， B 位於 O 的北偏東 60° 方向 10 公里處。

19. A, B 兩鄉鎮之間的距離為何？(單選題，5 分)

- (1) $\sqrt{136 - 60\sqrt{3}}$ 公里 (2) $\sqrt{136 + 60\sqrt{3}}$ 公里
 (3) $\sqrt{136 + 60\sqrt{2}}$ 公里 (4) 14 公里 (5) $2\sqrt{19}$ 公里



20. 隨著經濟的發展，為緩解鄉鎮 O 的交通壓力，擬在海岸線 L_1, L_2 上分別修建碼頭 N, M ，開闢水上航線。勘測時發現：以 O 為圓心，3 公里為半徑的扇形區域為淺水區，不適宜船隻航行。若 M, N 之間的直線航程最短，試求此最短航程距離為多少公里？(非選擇題，5 分)

RA290 111 學年度全國高級中學學科能力測驗模擬考試(高二 111-R1)

參考答案

選擇題：1. (4) 2. (4) 3. (5) 4. (3) 5. (3) 6. (1) 7. (1)(2)(3) 8. (1)(3)(4)(5) 9. (1)(2)(5)
10. (2)(3)(4)(5) 11. (1)(4) 12. (1)(4)(5)

選填題：13. 10 14. 59 15. $2\sqrt{5}$ 16. 8 17. 11 18. 13

混合題：19. (4) 20. $6\sqrt{3}$ 公里