數學考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(4)	(4)	(5)	(3)	(3)	(1)	(1)(2)(3)
8.	9.	10.	11.	12.		
(1)(3)(4)(5)	(1)(2)(5)	(2)(3)(4)(5)	(1)(4)	(1)(4)(5)		

第壹部分、選擇(填)題

一、單選題

1. (4)

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：了解數學歸納法證明的過程

解析：在 $n=k+1$ 時，沒有應用 $n=k$ 時的假設，不是數學歸納法

第 2 個步驟應修正為

當 $n=k+1$ 時，

$$\sqrt{(k+1)^2+(k+1)}=\sqrt{k^2+3k+2}$$
$$=\sqrt{(k^2+k)+(2k+2)}$$

(因為 $k^2+k=(\sqrt{k^2+k})^2<(k+1)^2$)

$$<\sqrt{(k+1)^2+(2k+2)}<\sqrt{(k+1)^2+2(k+1)+1^2}$$
$$=\sqrt{((k+1)+1)^2}=(k+1)+1$$

故選(4)。

2. (4)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：了解有理數的比較大小

解析：(1)╳：因為 $a>b>0$，

故 $\dfrac{b}{a}-\dfrac{b+1}{a+1}=\dfrac{b-a}{a(a+1)}<0$，

即 $\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+1}{a+1}$

(2)╳：因為 $a>b>0$，

故 $\dfrac{a}{b}-\dfrac{a+1}{b+1}=\dfrac{a-b}{b(b+1)}>0$，

即 $\dfrac{a}{b}>\dfrac{a+1}{b+1}$

(3)╳：$a+\dfrac{1}{a}-\left(b+\dfrac{1}{b}\right)=(a-b)\left(1-\dfrac{1}{ab}\right)$，無法判斷正負，不等式不一定成立

(4)○：因為 $a>b>0$，

故 $a-\dfrac{b}{a}-\left(b-\dfrac{a}{b}\right)=(a-b)\left(1+\dfrac{a+b}{ab}\right)>0$，

即 $a-\dfrac{b}{a}>b-\dfrac{a}{b}$

(5)╳：因為 $a>b>0$，

故 $\dfrac{2a+b}{a+2b}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{(b+a)(b-a)}{(a+2b)b}<0$，

即 $\dfrac{2a+b}{a+2b}<\dfrac{a}{b}$

故選(4)。

3. (5)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：了解機率的求法

解析：設有 k 粒黑子

由題意，$\dfrac{C^k_2}{C^{30}_2}=\dfrac{8}{29}\Rightarrow k=16$

故黑子有 16 粒，白子有 14 粒

拿到 2 粒都是白子的機率為 $\dfrac{C^{14}_2}{C^{30}_2}=\dfrac{91}{435}>\dfrac{1}{5}$

∴從中任意取出一黑一白的機率為

$$1-\frac{8}{29}-\frac{91}{435}=\frac{224}{435}>\frac{8}{29}+\frac{91}{435}=\frac{211}{435}$$

故選(5)。

4. (3)

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：了解等差級數總和的意義

解析：因為數列〈a_n〉的前 n 項和 S_n 有最大值，所以數列〈a_n〉是遞減的等差數列

又 $a_{2023}+a_{2024}<0$，$a_{2023}\cdot a_{2024}<0$，

所以 $a_{2023}>0>a_{2024}$，即數列的前 2023 項皆為正數，從第 2024 項開始為負數

由等差數列求和公式及性質可知

$$S_{4045}=\frac{4045}{2}(a_1+a_{4045})=4045a_{2023}>0$$
$$S_{4046}=\frac{4046}{2}(a_1+a_{4046})=\frac{4046}{2}(a_{2023}+a_{2024})<0$$
$$S_{4047}=\frac{4047}{2}(a_1+a_{4047})=4047a_{2024}<0$$

所以當 S_n 有最大值時，滿足條件的最小正整數 $n=4045$

故選(3)。

5. (3)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：了解二次函數圖形平移的意義

解析：∵α，β 為方程式 $f(x)=0$ 的兩個實數解

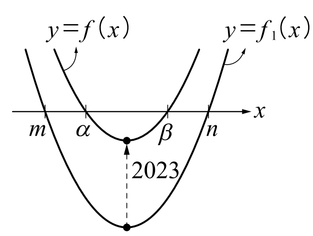
∴α，β 為函數 $f(x)=(x-m)(x-n)+2023$ 的圖形與 x 軸交點的橫坐標

令 $f_1(x)=(x-m)(x-n)$

∴m，n 為函數 $f_1(x)=(x-m)(x-n)$ 的圖形與 x 軸交點的橫坐標

又函數 $f(x)=(x-m)(x-n)+2023$ 的圖形可由

$f_1(x)=(x-m)(x-n)$ 的圖形向上平移 2023 個單位長度得到，如下圖所示



所以 $m<\alpha<\beta<n$

故選(3)。

6. (1)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：了解正弦定理與餘弦定理的應用

解析：∵$a\sin A-b\sin B=4c\sin C$

由正弦定理知 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

故原式可化為 $a^2-b^2=4c^2$，即 $a^2=4c^2+b^2$

又由餘弦定理，

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-(4c^2+b^2)}{2bc}$$

$$=\frac{-3c^2}{2bc}=\frac{-3c}{2b}$$

得 $\cos A=\frac{-3c}{2b}=-\frac{1}{4}\Rightarrow b=6c$

$\therefore \frac{b}{c}=6$

故選(1)。

二、多選題

7. (1)(2)(3)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：了解絕對值與不等式的意義

解析：由 $|x+y|\le 2$，$|x-y|\le 1$，

可得 $-2\le x+y\le 2$，$-1\le x-y\le 1$

又 $3x-y=(x+y)+(2x-2y)=(x+y)+2(x-y)$

由 $-2\le 2(x-y)\le 2$，

可得 $-4\le (x+y)+2(x-y)\le 4$

故選(1)(2)(3)。

8. (1)(3)(4)(5)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：了解最適直線的性質

解析：(1) ○：由散布圖可知，x，y 之間是正相關關係

所以 $r_1>0$，$r_2>0$

(2) ╳：因為去掉 E 點後相關性更強，所以 $r_1<r_2$

(3) ○：由散布圖可知，最適直線的斜率是正數

所以 $b_1>0$，$b_2>0$

(4) ○：承(3)，L_1 的斜率大於 L_2 的斜率，所以 $b_1>b_2$

(5) ○：未去掉 E 點之前，$(\mu_x,\mu_y)=(3,3)$

故 L_1 必過 $D(3,3)$

故選(1)(3)(4)(5)。

9. (1)(2)(5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：了解三次函數的綜合應用

解析：(1) ○：利用綜合除法，可得

$f(x)=x^3+3x^2+4$

$=1(x-1)^3+6(x-1)^2+9(x-1)+8$

所以序組 $(a,b,c,d)=(1,6,9,8)$

(2) ○：$f(0.98)$

$=1(0.98-1)^3+6(0.98-1)^2+9(0.98-1)+8$

$\approx 9\times(-0.02)+8=7.82$

(3)(4) ╳：$f(x)=x^3+3x^2+4$

$=(x^3+3x^2+3x+1)+4-3x-1$

$=(x+1)^3-3(x+1)+6$

故對稱中心為 $(-1,6)$

$y=f(x)$ 在 $x=-1$ 附近的一次近似為

$y=-3(x+1)+6=-3x+3$

(5) ○：將原圖形對稱中心 $(-1,6)$ 向左平移 2 單位，

再向下平移 3 單位為 $(-3,3)$

故選(1)(2)(5)。

10. (2)(3)(4)(5)

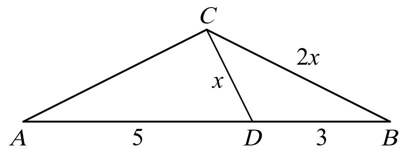
出處：第二冊〈三角比〉

目標：了解餘弦定理的應用

解析：(1) ╳：$\sin\angle CDB=\sqrt{1-\cos^2\angle CDB}$

$$=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt5}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt5}{5}$$

(2) ○：設 $\overline{CD}=x$，$\overline{BC}=2x$



由餘弦定理，$(2x)^2=3^2+x^2-2\cdot 3\cdot x\cdot\left(-\frac{\sqrt5}{5}\right)$，

解得 $x=\sqrt5$

又 $\frac{\triangle BCD\text{ 面積}}{\triangle ABC\text{ 面積}}=\frac{3}{8}$，得

$\triangle ABC$ 面積 $=\frac{8}{3}\times\triangle BCD$ 面積

$$=\frac{8}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times3\times\sqrt5\times\frac{2\sqrt5}{5}\right)=8$$

(3)(4) ○：$\cos B=\frac{3^2+(2\sqrt5)^2-(\sqrt5)^2}{2\times3\times2\sqrt5}$

$$=\frac{8^2+(2\sqrt5)^2-\overline{AC}^2}{2\times8\times2\sqrt5}$$

得 $\overline{AC}=2\sqrt5$

故 $\triangle ABC$ 為等腰三角形且周長為 $8+4\sqrt5$

(5) ○：$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}$ 最長，故 $\angle ACB$ 為最大角

$$\cos\angle ACB=\frac{(2\sqrt5)^2+(2\sqrt5)^2-8^2}{2\times2\sqrt5\times2\sqrt5}=-\frac{3}{5}<0$$

所以 $\angle ACB>90^\circ$，故 $\triangle ABC$ 為鈍角三角形

故選(2)(3)(4)(5)。

11. (1)(4)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：了解二次函數的應用

解析：(1) ○：此二次函數的圖形通過 $(0,34)$，$(32,34)$，$(4,90)$ 三點，且頂點的 x 坐標為 $\frac{32}{2}=16$

可設 $f(x)=a(x-16)^2+k$

$$\begin{cases}256a+k=34\\144a+k=90\end{cases}$$

解得 $a=-\frac{1}{2}$，$k=162$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}(x-16)^2+162$

$=-\frac{1}{2}x^2+16x+34$

得 $a+b+c=49\frac{1}{2}<50$

(2) ╳：頂點的 x 坐標為 16，故學生人數最多時應為 7 點 16 分

⑶ ╳：由 $y=-\frac{1}{2}(x-16)^2+162$

所以在校門口排隊等待體溫檢測的學生人數最多時為 162 人

⑷ ○：令 $y=0$，得 $-\frac{1}{2}x^2+16x+34=0$，

可解得 $x=34$ 或 -2 (不合)

⑸ ╳：設第 x 分鐘時的排隊等待人數為 k 人

由題意得 $k=y-2x=-\frac{1}{2}x^2+14x+34$

當 $x=30$ 時，$k=4>0$

$\therefore$所有學生不能在 7 點 30 分完成進校

故選⑴⑷。

12. ⑴⑷⑸

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：利用圓心到直線的距離與半徑的比較判斷圓與直線的位置關係

解析：圓心 $C(0\,,0)$ 到直線 L 的距離 $d=\frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

⑴ ○：若點 $A(a\,,b)$ 在圓 C 上，則 $a^2+b^2=r^2$，所以

$d=\frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=|r|$，則直線 L 與圓 C 相切

⑵ ╳：若點 $A(a\,,b)$ 在圓 C 內，則 $a^2+b^2<r^2$，所以

$d=\frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}>|r|$，則直線 L 與圓 C 不相交

⑶ ╳：若點 $A(a\,,b)$ 在圓 C 外，則 $a^2+b^2>r^2$，所以

$d=\frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}<|r|$，則直線 L 與圓 C 相交

⑷ ○：若點 $A(a\,,b)$ 在直線 L 上，則 $a^2+b^2-r^2=0$，

即 $a^2+b^2=r^2$，所以 $d=\frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=|r|$，

則直線 L 與圓 C 相切

⑸ ○：若點 $A(a\,,b)$ 在圓 C 上，則 $a^2+b^2=r^2$，及直線 L：$ax+by=a^2+b^2$

將 $A(a\,,b)$ 代入直線 L 得 $a\cdot a+b\cdot b=a^2+b^2$，

故 $A(a\,,b)$ 在直線 L 上

故選⑴⑷⑸。

三、選填題

13. 10

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：了解指數律的應用

解析：設 $2^a=5^b=t\ (t>0)$

則 $2=t^{\frac{1}{a}}$，$5=t^{\frac{1}{b}}$

又 $t^{\frac{1}{a}}\times t^{\frac{1}{b}}=t^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=t^2=2\times5=10$

$\therefore t=\pm\sqrt{10}$ ($-\sqrt{10}$ 不合)

故 $2^a\times5^b=t^2=10$。

14. 59

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：了解相同物的排列方式

解析：$\because$五個字母進行全排列共有 $\frac{5!}{2!}=60$ 種結果，在這 60 種結果裡只有 1 種 (happy) 是正確的

$\therefore$可能出現的錯誤共有 $60-1=59$ 種。

15. $2\sqrt{5}$

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：了解圓與直線的關係

解析：直線 L：$ax+by=2a-b\ (a\,,b\in\mathbb{R})$，

即 $a(x-2)+b(y+1)=0$，所以直線 L 過定點 $A(2\,,-1)$

設圓 C 的圓心為 $O(0\,,0)$，則 $\overline{OA}=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$，

又圓 C 半徑 $r=\sqrt{10}$，故點 A 在圓 C 內

所以當直線 L 與 $\overline{OA}$ 垂直的時候，$\overline{MN}$ 最短，此時

$\overline{MN}=2\sqrt{r^2-\overline{OA}^2}=2\sqrt{5}$。

16. 8

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：了解數列與級數的意義

解析：設等比數列〈a_n〉的公比為 r

由題設 $2S_2=S_3-a_1$，

即 $2(a_1+a_2)=a_2+a_3=a_1r+a_2r=r(a_1+a_2)$，得 $r=2$

因為 $a_n>0$，由 $\sqrt{a_m\cdot a_k}=8a_1$ 得

$a_1r^{m-1}\cdot a_1r^{k-1}=a_1^2r^{m+k-2}=64a_1^2$，即 $2^{m+k-2}=64=2^6$

所以 $m+k=8$。

17. 11

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：了解排列的日常應用

解析：先選擇參加物理講座的方案有 2 種：

⑴ 物理講座選擇 2 月 20 日

再選擇一天參加化學講座，有 2 種方案

最後再從剩下的 2 天裡選擇一天參加生物講座，有 2 種方案

所以一共有 $1\times2\times2=4$ 種選擇方案

⑵ 物理講座選擇 2 月 21 日

再選擇一天參加化學講座

① 若選擇 2 月 20 日化學講座

最後再從剩下的 3 天裡選擇一天參加生物講座，有 3 種方案

所以一共有 $1\times1\times3=3$ 種選擇方案

② 若不選擇 2 月 20 日化學講座

則選擇化學講座有 2 種方案

最後再從剩下的 2 天裡選擇一天參加生物講座，有 2 種方案

所以一共有 $1\times2\times2=4$ 種選擇方案

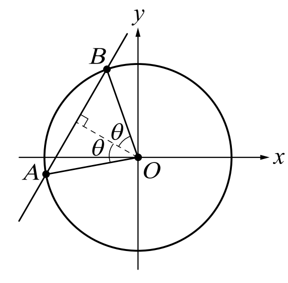
故共有 $4+3+4=11$ 種選擇方案。

18. 13

出處：第一冊〈直線與圓〉、第二冊〈三角比〉

目標：了解直線與圓的關係與三角比的範圍

解析：作圓心 O 到直線 AB 的垂線，如下圖所示



設$\angle AOB=2\theta$，則$0^\circ<2\theta<90^\circ$，可得$0^\circ<\theta<45^\circ$，

所以$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos\theta<1$

設圓心 O 到直線 AB 的距離為 d

而圓 C 的圓心為原點 $O(0\,,0)$，半徑為 4

所以$d=4\cos\theta$，且$2\sqrt{2}<d<4$

又由點到直線的距離公式可得$d=\dfrac{|0-0+b|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\dfrac{|b|}{2}$

所以$2\sqrt{2}<\dfrac{|b|}{2}<4$

解得$-8<b<-4\sqrt{2}$ 或 $4\sqrt{2}<b<8$

因為 b 為正整數，所以 b 值可為 6 或 7，

故所有符合條件的 b 值之和為 13。

第貳部分、混合題或非選擇題

19. (4)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：了解餘弦定理的應用

解析：在$\triangle ABO$中，$\overline{OA}=6$，$\overline{OB}=10$，$\angle AOB=120^\circ$

根據餘弦定理得

$$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\times\overline{OA}\times\overline{OB}\times\cos120^\circ$$
$$=6^2+10^2-2\times6\times10\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=196$$

所以$\overline{AB}=14$，故 A，B 兩鄉鎮之間的距離為 14 公里，故選(4)。

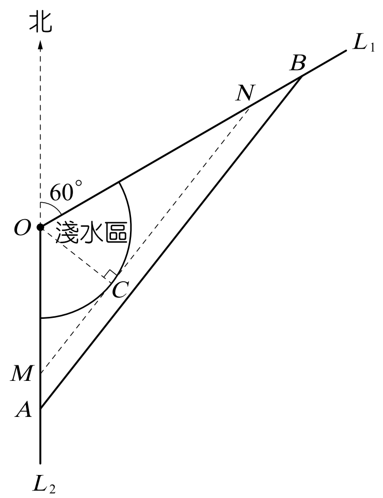
20. $6\sqrt{3}$ 公里

出處：第二冊〈三角比〉

目標：了解三角形面積公式與餘弦定理的應用

解析：依題意知，直線 MN 必與圓 O 相切

令切點為 C，連接$\overline{OC}$，則$\overline{OC}\perp\overline{MN}$



設$\overline{OM}=x$，$\overline{ON}=y$，$\overline{MN}=c$

在$\triangle OMN$中，

由$\dfrac{1}{2}\times\overline{MN}\times\overline{OC}=\dfrac{1}{2}\times\overline{OM}\times\overline{ON}\times\sin120^\circ$

得$\dfrac{1}{2}\times3c=\dfrac{1}{2}xy\sin120^\circ$，即$xy=2\sqrt{3}c$

由餘弦定理得

$c^2=x^2+y^2-2xy\cos120^\circ=x^2+y^2+xy$

由算幾不等式知$\dfrac{x^2+y^2}{2}\geq\sqrt{x^2y^2}\Rightarrow x^2+y^2\geq2xy$

所以$c^2=x^2+y^2+xy\geq3xy=6\sqrt{3}c$，解得$c\geq6\sqrt{3}$

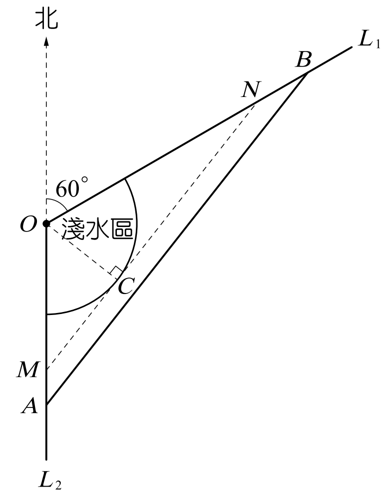
當$x=y=6$時，算幾不等式等號成立，則$c=\overline{MN}$有最小值$6\sqrt{3}$

所以當碼頭 M、N 與鄉鎮 O 的距離均為 6 公里時，M，N 之間的直線航程最短，最短航程距離為$6\sqrt{3}$公里。

◎評分原則

依題意知，直線 MN 必與圓 O 相切

令切點為 C，連接$\overline{OC}$，則$\overline{OC}\perp\overline{MN}$



設$\overline{OM}=x$，$\overline{ON}=y$，$\overline{MN}=c$

在$\triangle OMN$中，

由$\dfrac{1}{2}\times\overline{MN}\times\overline{OC}=\dfrac{1}{2}\times\overline{OM}\times\overline{ON}\times\sin120^\circ$

得$\dfrac{1}{2}\times3c=\dfrac{1}{2}xy\sin120^\circ$，即$xy=2\sqrt{3}c$　(1 分)

由餘弦定理得

$c^2=x^2+y^2-2xy\cos120^\circ=x^2+y^2+xy$　(1 分)

由算幾不等式知$\dfrac{x^2+y^2}{2}\geq\sqrt{x^2y^2}\Rightarrow x^2+y^2\geq2xy$

所以$c^2=x^2+y^2+xy\geq3xy=6\sqrt{3}c$，解得$c\geq6\sqrt{3}$　(2 分)

當$x=y=6$時，算幾不等式等號成立，則$c=\overline{MN}$有最小值$6\sqrt{3}$　(1 分)

所以當碼頭 M、N 與鄉鎮 O 的距離均為 6 公里時，M，N 之間的直線航程最短，最短航程距離為$6\sqrt{3}$公里。