

數學考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(1)	(4)	(5)	(2)	(3)	(4)	(2)
8.	9.	10.	11.	12.		
(3)	(2)(3)(5)	(1)(2)	(3)(4)(5)	(1)(2)		

第壹部分、選擇(填)題

一、單選題

1. (1)

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：指數律

$$\text{解析：} \frac{17^{2022} + 17^{2024}}{17^{2022} + 17^{2023}} = \frac{17^{2022}(1+17^2)}{17^{2022}(1+17)} = \frac{1+289}{1+17} = \frac{290}{18} \approx 16,$$

故選(1)。

2. (4)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：散布圖和相關係數

解析：(1) \times ：∵圖(一)為負相關 ∴ $r_1 < 0$

(2) \times ：∵圖(一)及圖(二)皆為負相關且圖(一)較圖(二)分散 ∴ $0 > r_1 > r_2$

(3) \times ：∵圖(三)幾乎上下左右對稱 ∴ $r_3 \approx 0$

(4) \circ ：∵圖(四)及圖(五)皆為正相關且圖(四)較圖(五)分散 ∴ $0 < r_4 < r_5$

(5) \times ：如果把圖(一)的A點去掉，則相關係數會變小
故選(4)。

3. (5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：二次函數的對稱軸

解析：因為對稱軸為 $x = -1$ ，所以通過的三個點為 $(-3, 3)$ ，

$(1, 3)$ ， $(2, 8)$

$$\begin{cases} 4a+k=3 \\ 9a+k=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ k=-1 \end{cases}$$

∴ $a+k=0$ ，故選(5)。

4. (2)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：組合

解析：四同 $C_1^2 = 2$ (種)

三同一異 $C_1^2 C_1^3 = 6$ (種)

兩同兩同 $C_2^3 = 3$ (種)

兩同兩異 $C_1^3 C_2^3 = 9$ (種)

四異 $C_4^4 = 1$ (種)

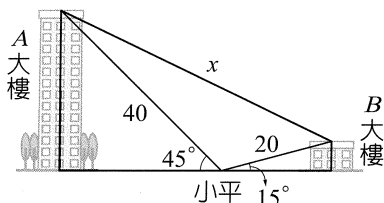
共有 $2+6+3+9+1=21$ (種)，故選(2)。

5. (3)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：餘弦定理

解析：設此電纜線為 x 公尺，依題意作圖



$$x^2 = 40^2 + 20^2 - 2 \cdot 40 \cdot 20 \cdot \cos 120^\circ = 2800$$

解得 $x = 20\sqrt{7}$ (公尺)

故選(3)。

6. (4)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：算幾不等式

$$\begin{aligned} \text{解析：} & \frac{2y-x}{x} + \frac{4(z+x-2y)}{y} - \frac{8(z-y)}{z} + 17 \\ & = \left(\frac{2y}{x} - 1\right) + \left(\frac{4z}{y} + \frac{4x}{y} - 8\right) - \left(8 - \frac{8y}{z}\right) + 17 \\ & = \left(\frac{2y}{x} + \frac{4x}{y}\right) + \left(\frac{8y}{z} + \frac{4z}{y}\right) \\ & \geq 2\sqrt{8} + 2\sqrt{32} = 12\sqrt{2} \end{aligned}$$

∴最小值為 $12\sqrt{2}$

故選(4)。

7. (2)

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：等差數列

$$\text{解析：} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 = 189 \cdots \cdots \text{①}$$

$$\text{令 } a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_1 = x \cdots \cdots \text{②}$$

由①+②得

$$(a_1 + a_4)b_1 + (a_2 + a_3)b_2 + (a_3 + a_2)b_3 + (a_4 + a_1)b_4 = x + 189$$

$$\therefore a_1 + a_4 = a_2 + a_3 = 52$$

$$\therefore 52(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) = 52 \times 7 = x + 189$$

解得 $x = 175$

故選(2)。

二、多選題

8. (3)

出處：第一冊〈指數、對數〉、第二冊〈數列與級數〉

目標：等差數列和級數、等比數列

$$\text{解析：(1) } \times : \begin{cases} a_1 + 9d = 64 \\ a_1 + 17d = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 100 \\ d = -4 \end{cases}$$

$$(2) \times : S_{25} = \frac{[2 \times 100 + 24 \times (-4)] \times 25}{2} = 1300,$$

$$S_{26} = \frac{[2 \times 100 + 25 \times (-4)] \times 26}{2} = 1300$$

$$\therefore S_{25} = S_{26}$$

(3) \circ ： $\langle b_n \rangle$ 是一個等比數列，公比為 $2^{-4} = \frac{1}{16}$

$$(4) \times : b_{30} = 2^{100} \times \left(\frac{1}{16}\right)^{29} > b_{40} = 2^{100} \times \left(\frac{1}{16}\right)^{39}$$

$$(5) \times : \log b_{50} = \log \left(2^{100} \times \left(\frac{1}{16}\right)^{49}\right)$$

$$= \log 2^{-96}$$

$$\approx \log (10^{0.3010})^{-96}$$

$$= \log 2^{-28.896}$$

$$= -28.896 < 0$$

故選(3)。

9. (2)(3)(5)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：均量與差量的線性調整

解析：設原分數為 x ，調整後的分數為 y ， $y \geq x$

$$(1) \times : \mu_y = 0.4\mu_x + 40 = 62 \Rightarrow \mu_x = \frac{62 - 40}{0.4} = 55$$

$$(2) \bigcirc : \sigma_y = 0.4\sigma_x = 8 \Rightarrow \sigma_x = \frac{8}{0.4} = 20$$

$$(3) \bigcirc : y = 0.4x + 40 \Rightarrow x = \frac{5}{2}y - 100$$

若 $y < 60$, 則 $x < 50$

調整後有 2 人不及格, 代表原分數有 2 人不到 50 分

$$(4) \times (5) \bigcirc : y = 0.4x + 40 \geq x$$

$$\therefore x \leq \frac{200}{3}$$

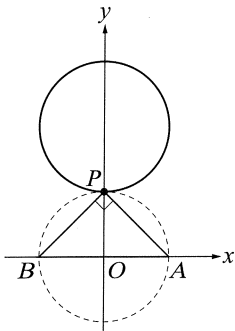
故選(2)(3)(5)。

10. (1)(2)

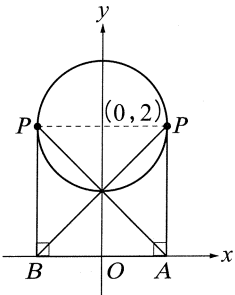
出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：圓的圖形

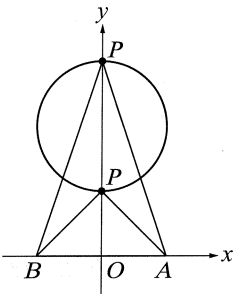
解析：



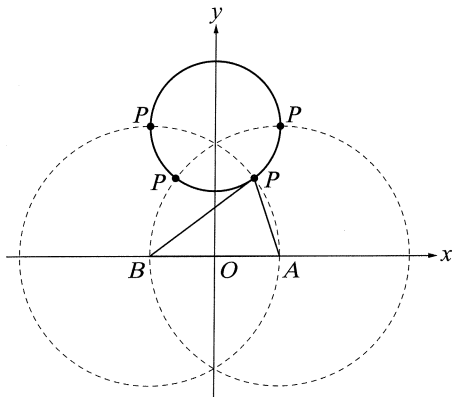
圖(一)



圖(二)



圖(三)



圖(四)

(1) \bigcirc : 使 $\triangle ABP$ 面積為 1 的 P 點恰有 1 個, 如圖(一)

(2) \bigcirc : 使 $\triangle ABP$ 面積為 2 的 P 點恰有 2 個, 如圖(二)

(3) \times : 使 $\triangle ABP$ 為正三角形的 P 點恰有 0 個

(4) \times : 使 $\triangle ABP$ 為等腰三角形的 P 點恰有 6 個, 如圖(三)、圖(四)

(5) \times : 使 $\triangle ABP$ 為直角三角形的 P 點恰有 3 個, 如圖(一)、圖(二)

故選(1)(2)。

11. (3)(4)(5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：多項式不等式

解析： $f(x) = a(x-1)(x-2)$, $g(x) = b(x-2)(x-3)$, 其中 a, b 均不等於 0

$$f(x) - g(x) = (x-2) [a(x-1) - b(x-3)] \\ = (x-2) [(a-b)x + (-a+3b)] < 0$$

(1) 若 $a-b=0 (a=b)$

$$\Rightarrow f(x) - g(x) = (x-2)(-a+3b) = (x-2) \times 2b < 0$$

① 當 $b > 0$ 時, 解為 $x < 2$

② 當 $b < 0$ 時, 解為 $x > 2$

(2) 若 $a-b \neq 0$

$$\Rightarrow f(x) - g(x) = (a-b)(x-2) \left(x - \frac{a-3b}{a-b} \right) < 0$$

$$\text{令 } k = \frac{a-3b}{a-b} \Rightarrow f(x) - g(x) = (a-b)(x-2)(x-k) < 0$$

① 當 $a-b > 0$ 時：

① $k < 2 \Rightarrow$ 解為 $k < x < 2$

② $k > 2 \Rightarrow$ 解為 $2 < x < k$

③ $k = 2 \Rightarrow$ 無解

② 當 $a-b < 0$ ：

① $k < 2 \Rightarrow$ 解為 $x < k$ 或 $x > 2$

② $k > 2 \Rightarrow$ 解為 $x > k$ 或 $x < 2$

③ $k = 2 \Rightarrow$ 解為 x 為實數且 $x \neq 2$

故選(3)(4)(5)。

12. (1)(2)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：列舉算出各情形

解析：(1) \bigcirc : 所有情形有 $4^3 = 64$ 種

(2) \bigcirc : 正三角形有 $(4, 4, 4)$, $(6, 6, 6)$, $(8, 8, 8)$, $(10, 10, 10)$, 共 4 種

(3) \times : 非正三角形的等腰三角形有 $(4, 4, 6)$, $(4, 6, 6)$, $(4, 8, 8)$, $(4, 10, 10)$, $(6, 6, 8)$, $(6, 8, 8)$, $(6, 6, 10)$, $(6, 10, 10)$, $(8, 8, 10)$, $(8, 10, 10)$, 共 $10 \times \frac{3!}{2!} = 30$ 種

故等腰三角形共有 $4 + 30 = 34$ 種

(4) \times : 直角三角形有 $(6, 8, 10)$, 共 $3! = 6$ 種

(5) \times : 圍不成三角形的有 $(4, 4, 8)$, $(4, 4, 10)$, $(4, 6, 10)$, 共 $2 \times \frac{3!}{2!} + 3! = 12$ 種

故三角形共有 $64 - 12 = 52$ 種

故選(1)(2)。

三、選填題

13. -2

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：解指數方程式

$$\text{解析：} f(0) = \frac{1}{2+a} \times 100\% = 1\% \Rightarrow a = 98$$

$$f(1) = \frac{1}{2+98 \times 7^b} \times 100\% = 25\% \Rightarrow b = -2$$

14. 12

出處：第一冊〈數與式〉、第二冊〈三角比〉

目標：三角形的面積公式，算幾不等式

解析：三角形的面積為 $r \cdot \left(\frac{a+b+c}{2}\right) = \frac{abc}{4R}$

$$\Rightarrow 2Rr = \frac{abc}{a+b+c} = 72 \Rightarrow Rr = 36$$

由算幾不等式得 $\frac{R+r}{2} \geq \sqrt{Rr} = \sqrt{36} = 6$

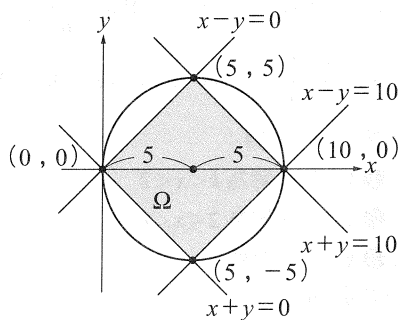
則 $R+r \geq 12$ ，故 $R+r$ 的最小值為 12。

15. 25

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：二元一次不等式

解析：如下圖所示



所求面積為 $\pi \times 5^2 = 25\pi$ 。

16. $2\sqrt{5}$

出處：第一冊〈數與式〉

目標：公式解求解一元二次方程式及乘法公式

解析：原式兩邊同除以 2022，並移項得

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$$

$$\Rightarrow (a+b)(b-a) = ab \Rightarrow b^2 - a^2 = ab$$

$$\text{等號兩邊同除以 } a^2, \text{ 移項得 } \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b}{a} - 1 = 0,$$

$$\text{利用公式解得 } \frac{b}{a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

(因為 a, b 為正實數，所以負不合)

$$\frac{b}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \Rightarrow \frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \sqrt{5}$$

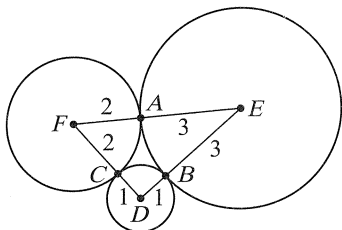
$$\text{故 } \left(\frac{b}{a}\right)^3 + \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)^3 - 3\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) = 2\sqrt{5}.$$

17. $\frac{6}{5}$

出處：第二冊〈三角比〉

目標：三角形的面積公式

解析：



$$\triangle DEF \text{ 面積為 } \frac{3 \times 4}{2} = 6$$

$$\triangle DBC : \triangle DEF = 1 : 12, \triangle EAB : \triangle DEF = 9 : 20,$$

$$\triangle FAC : \triangle DEF = 4 : 15$$

$$\therefore 1 - \frac{1}{12} - \frac{9}{20} - \frac{4}{15} = \frac{1}{5} \quad \therefore \triangle ABC : \triangle DEF = 1 : 5$$

$$\text{故 } \triangle ABC \text{ 面積為 } 6 \times \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$$

第貳部分、混合題或非選擇題

18. (2)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：計數原理、組合

解析： $4 \times 3 \times 2 = 24$ (種)，故選(2)。

19. 6 種

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：計數原理、組合

解析： $C_2^3 \times 2 = 6$ (種)。

◎評分原則

$$C_2^3 \times 2 = 6 \text{ (種)} \cdot (5 \text{ 分})$$

20. 16 天

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：計數原理、組合

解析：〈方法一〉

分成選粥、白飯、紫米飯或炒飯 3 種情形來討論

$$1 \times 2 \times 1 + 1 \times 3 \times 2 + 2 \times 2 \times 2 = 16。$$

〈方法二〉

分成選粥、白飯、紫米飯、炒飯 4 種情形來討論

$$1 \times 2 \times 1 + 1 \times 3 \times 2 + 1 \times 2 \times 2 + 1 \times 2 \times 2 = 16。$$

〈方法三〉反面解法(1)

$$4 \times 3 \times 2 - 1 \times 2 \times 1 - 3 \times 1 \times 2 = 16。 \text{ (扣除不合的兩種情形)}$$

〈方法四〉反面解法(2)

$$4 \times 3 \times 2 - 1 \times 3 \times 1 - 3 \times 1 \times 2 + 1 \times 1 \times 1 = 16。 \text{ (取捨原理)}$$

◎評分原則

〈方法一〉

分成選粥、白飯、紫米飯或炒飯 3 種情形來討論

$$1 \times 2 \times 1 + 1 \times 3 \times 2 + 2 \times 2 \times 2 = 16。 \text{ (每種情形各 2 分)}$$

〈方法二〉

分成選粥、白飯、紫米飯、炒飯 4 種情形來討論

$$1 \times 2 \times 1 + 1 \times 3 \times 2 + 1 \times 2 \times 2 + 1 \times 2 \times 2 = 16。 \text{ (前兩種情形各 2 分，後兩種情形各 1 分)}$$

〈方法三〉反面解法(1)

$$4 \times 3 \times 2 - 1 \times 2 \times 1 - 3 \times 1 \times 2 = 16。 \text{ (扣除不合的兩種情形各 3 分)}$$

〈方法四〉反面解法(2)

$$4 \times 3 \times 2 - 1 \times 3 \times 1 - 3 \times 1 \times 2 + 1 \times 1 \times 1 = 16。 \text{ (取捨原理)}$$

(取捨原理的後面三項各 2 分)