

全國高中 112 年(111 學年度)

高三上學測聯合模擬考數學試題 (108 課綱第一二冊)

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題 (占 85 分)

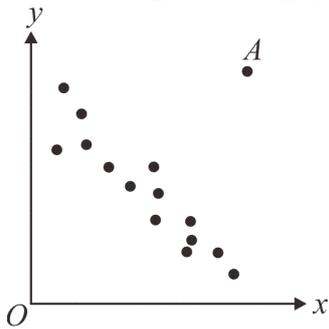
一、單選題 (占 35 分)

1. $\frac{17^{2022} + 17^{2024}}{17^{2022} + 17^{2023}}$ 的值最接近下列哪一個選項？
 (1)16 (2)17 (3)18 (4)2022 (5)2023。

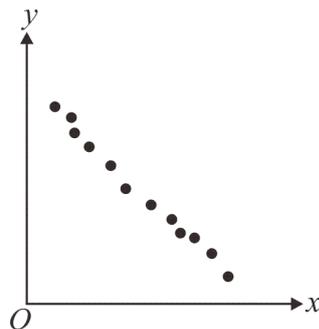
答：(1) (108 課綱第一冊第一章指數)

解： 所求 = $\frac{17^{2022} [1+17^2]}{17^{2022} [1+17]} = \frac{290}{18} \doteq 16.1\dots$

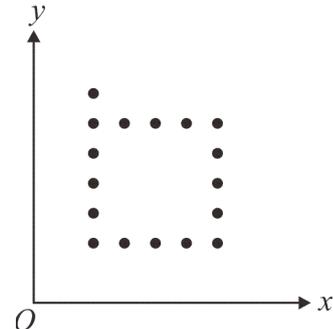
2. 有五個散布圖如圖(一)到圖(五)，其相關係數分別為 r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 ，下列哪一個選項的敘述是正確的？



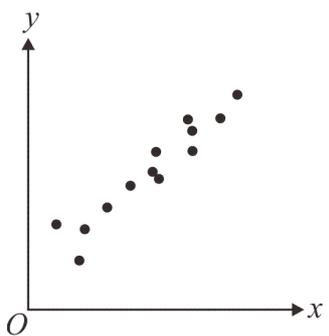
圖(一)



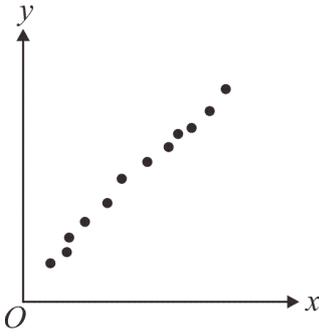
圖(二)



圖(三)



圖(四)



圖(五)

- (1) $r_1 > 0$ (2) $r_1 < r_2$ (3) $r_3 = 0$ (4) $r_4 < r_5$
 (5) 如果把圖(一)的 A 點去掉，則相關係數會變大。

答：(4) (108 課綱第二冊第二章數據分析—相關係數)

解： $r_5 \doteq 0.9, r_4 \doteq 0.7, r_3 \doteq 0, r_2 = -0.9, r_1 \doteq -0.7$

3. 小平在計算一道多項式函數的題目時，遺忘了答案，只記得此二次多項式函數為 $f(x) = a(x+1)^2 + k$ ，其中 a 、 k 皆為整數。還好他在計算紙上找到一些計算過程，發現此多項式函數圖形通過 $(-3, 3)$ 、 $(-1, 3)$ 、 $(1, 3)$ 、 $(2, 8)$ 其中的三點，則 $a+k$ 的值為下列哪一個選項？
 (1) -4 (2) -3 (3) -2 (4) -1 (5) 0。

答：(5) (108 課綱第一冊第三章多項函數—二次函數)

解：過 $(-3, 3) \Rightarrow 4a + k = 3$
 過 $(-1, 3) \Rightarrow k = 3$
 過 $(1, 3) \Rightarrow 4a + k = 3$
 過 $(2, 8) \Rightarrow 9a + k = 8$

$\left. \begin{array}{l} \text{僅成立} \\ \text{其中二式} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \therefore a, k \in Z \\ \therefore a = 1, k = -1 \end{array}$

4. 有白、紅、黃、藍四種顏色的粉筆供取用，其中黃色粉筆有1枝，藍色粉筆有2枝，其餘顏色的粉筆都至少有4枝。今從中任取4枝粉筆，其方法數為下列哪一個選項？
 (1) 16種 (2) 21種 (3) 24種 (4) 32種 (5) 35種。

答：(2) (108 課綱第二冊第三章排列組合機率)

解：四同： $C_1^2 = 2$
 三同一異： $C_1^2 C_1^3 = 6$
 二同二異： $C_1^3 C_2^3 = 9$
 二同二同： $C_2^3 = 3$
 四異： $C_4^4 = 1$

} 合計 21 種

5. 小平往西觀測 A 大樓樓頂，測得其仰角為 45° 且小平所在位置距離樓頂 40 公尺；往東觀測 B 大樓樓頂，測得其仰角為 15° 且小平所在位置距離樓頂 20 公尺。若想在這兩棟大樓樓頂拉一條電纜線，此電纜線長度的最小值為下列哪一個選項？
 (1) $20\sqrt{5}$ 公尺 (2) $20\sqrt{6}$ 公尺 (3) $20\sqrt{7}$ 公尺 (4) $40\sqrt{2}$ 公尺 (5) 60 公尺。

答：(3) (108 課綱第二冊第四章三角比—餘弦定律)

解：餘弦定律 $\cos 120^\circ = \frac{40^2 + 20^2 - x^2}{2 \times 40 \times 20} \Rightarrow x = 20\sqrt{7}$

6. 設 $x > 0$ 、 $y > 0$ 、 $z > 0$ ，則 $\frac{2y-x}{x} + \frac{4(z+x-2y)}{y} - \frac{8(z-y)}{z} + 17$ 的最小值為下列哪一個選項？
 (1) 7 (2) 12 (3) $7\sqrt{2}$ (4) $12\sqrt{2}$ (5) $17\sqrt{2}$ 。

答：(4) (108 課綱第一冊第一章算幾不等式)

解：原式 = $\frac{2y}{x} + \frac{4z}{y} + \frac{4x}{y} + \frac{8y}{z}$
 $\geq 2\sqrt{\frac{2y}{x} \cdot \frac{4x}{y}} + 2\sqrt{\frac{4z}{y} \cdot \frac{8y}{z}} = 12\sqrt{2}$

等號成立於 $\frac{2y}{x} = \frac{4x}{y}$ 且 $\frac{4z}{y} = \frac{8y}{z} \Rightarrow z^2 = 2y^2 = 4x^2$

7. 有兩數列 $\langle a_n \rangle$ 和 $\langle b_n \rangle$ ，其中 $\langle a_n \rangle$ 為等差數列，已知 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 104$ ，
 $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 7$ ， $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 = 189$ ，則
 $a_1b_4 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1$ 的值為下列哪一個選項？
 (1)170 (2)175 (3)180 (4)185 (5)190。

答：(2) (108 課綱第二冊第一章數列級數—等差)

解： $a_1 = (26-3d)$ ， $a_2 = (26-d)$ ， $a_3 = (26+d)$ ， $a_4 = (26+3d)$

而 $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 = 189$

$\Rightarrow (26-3d)b_1 + (26-d)b_2 + (26+d)b_3 + (26+3d)b_4 = 189$

$\Rightarrow 26 \times (b_1 + b_2 + b_3 + b_4) - d(3b_1 + b_2 - b_3 - 3b_4) = 189$

$\Rightarrow d(3b_1 + b_2 - b_3 - 3b_4) = -7$

故 $a_1b_4 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1$

$= (26-3d)b_4 + (26-d)b_3 + (26+d)b_2 + (26+3d)b_1$

$= 26 \times (b_1 + b_2 + b_3 + b_4) + d(-3b_4 - b_3 + b_2 + 3b_1)$

$= 26 \times 7 - 7 = 175$

二、多選題 (占 25 分)

8. 一等差數列 $a_{10} = 64$ 、 $a_{18} = 32$ ，且 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ，若 $b_n = 2^{a_n}$ ，
 則下列選項哪些是正確的？
 (1) $\langle a_n \rangle$ 的公差為 -2 (2) $S_{25} > S_{26}$ (3) $\langle b_n \rangle$ 是一個等比數列
 (4) $b_{30} < b_{40}$ (5) $\log b_{50} > 0$ 。

答：(3) (108 課綱第二冊第一章數列級數—等差等比)

解： $\begin{cases} a_{10} = a_1 + 9d = 64 \\ a_{18} = a_1 + 17d = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 100 \\ d = -4 \end{cases} \Rightarrow a_n = 100 + (n-1) \times (-4)$

$S_{26} = S_{25} + a_{26} = S_{25} + 0$

$b_n = 2^{a_n} = 2^{104-4n} = \frac{2^{104}}{16^n} \Rightarrow b_{30} > b_{40} = b_{30} \times \frac{1}{16^{10}}$

$\log b_{50} = \log 2^{-96} = -96 \log 2 < 0$

9. 某次數學小考成績不理想，老師想要調整分數，將每一位學生的原始分數乘以 0.4，再加 40 分，已知每個人調整後的分數皆大於或等於原分數，且調整後的平均分數為 62 分，標準差 8 分，且有 2 人分數仍不及格（小於 60 分），下列哪些選項的敘述是正確的？
 (1) 原始分數的平均為 45 分 (2) 原始分數的標準差為 20 分
 (3) 原來有 2 人的分數不到 50 分 (4) 原來的最高分不及格（小於 60 分）
 (5) 原來的最高分不到 70 分。

答：(2)(3)(5) (108 課綱第二冊第二章數據分析—平均數標準差平移伸縮)

解： $x' = 0.4x + 40 \xrightarrow{\overline{X}' = 62, S' = 8} \overline{X} = 55, S = 20$ ，故原始分數平均為 55、標準差為 20
 $x' < 60 \Rightarrow x < 50$ ，故原來有 2 人的分數不到 50
 由 $x' = 0.4x + 40 > x \Rightarrow x \leq \frac{200}{3} \approx 66.6\dots$

10. 已知平面上兩點 $A(1,0)$ 、 $B(-1,0)$ ， P 為圓 $\Gamma: x^2 + (y-2)^2 = 1$ 上的動點。
 下列哪些選項是正確的？
 (1) 使 $\triangle ABP$ 面積為 1 的 P 點恰有 1 個 (2) 使 $\triangle ABP$ 面積為 2 的 P 點恰有 2 個
 (3) 使 $\triangle ABP$ 為正三角形的 P 點恰有 1 個 (4) 使 $\triangle ABP$ 為等腰三角形的 P 點恰有 2 個
 (5) 使 $\triangle ABP$ 為直角三角形的 P 點恰有 2 個。

答：(1)(2) (108 課綱第一冊第二章圖)

解：(1) $P(0,1)$ 成立
 (2) $P(1,2)$ 、 $P(-1,2)$ 成立
 (3) 均不成立
 (4) $P(0,1)$ 、 $P(0,3)$ 、 $P(1,2)$ 、 $P(-1,2)$ 、 $P\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$ 、 $P\left(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$ 成立
 (5) $P(0,1)$ 、 $P(1,2)$ 、 $P(-1,2)$ 成立

11. 已知實係數二次多項式函數 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸交於 $(1,0)$ 與 $(2,0)$ 兩點，
 實係數二次多項式函數 $y = g(x)$ 的圖形與 x 軸交於 $(2,0)$ 與 $(3,0)$ 兩點。
 則 $f(x) - g(x) < 0$ 的解可能為下列哪些選項？
 (1) $x > 3$ 或 $x < 1$ (2) $1 < x < 3$ (3) $x > 2$ (4) x 為實數且 $x \neq 2$ (5) 無解。

答：(3)(4)(5) (108 課綱第一冊第三章多項函數—二次函數)

解： $y = f(x) = a(x-1)(x-2)$ 、 $y = g(x) = b(x-2)(x-3)$ ， $a \neq 0$ 、 $b \neq 0$
 $f(x) - g(x) = (x-2)[(a-b)x - (a-3b)] < 0$

當 $a-b=0 \Rightarrow f(x) - g(x) = (x-2)[2b] < 0 \Rightarrow \begin{cases} b > 0 \Rightarrow \text{解為 } x < 2 \\ b < 0 \Rightarrow \text{解為 } x > 2 \end{cases}$

當 $a-b \neq 0 \Rightarrow f(x) - g(x) = (a-b)(x-2) \left[x - \left(\frac{a-3b}{a-b} \right) \right] < 0$

$$\xrightarrow{k = \frac{a-3b}{a-b}} \begin{cases} a-b > 0 \begin{cases} k > 2 \Rightarrow \text{解為 } 2 < x < k \\ k < 2 \Rightarrow \text{解為 } k < x < 2 \\ k = 2 \Rightarrow \text{無解} \end{cases} \\ a-b < 0 \begin{cases} k > 2 \Rightarrow \text{解為 } x > k \text{ 或 } x < 2 \\ k < 2 \Rightarrow \text{解為 } x < k \text{ 或 } x > 2 \\ k = 2 \Rightarrow \text{解為 } x \in R, x \neq 2 \end{cases} \end{cases}$$

12. 有一顆公正的正四面體骰子，四個面的點數分別為 4、6、8、10，將此骰子連丟三次，
 底面的點數為 a 、 b 、 c ，則下列哪些選項的敘述是正確的？
 (1) (a,b,c) 共有 64 種 (2) (a,b,c) 可圍成正三角形的有 4 種
 (3) (a,b,c) 可圍成等腰三角形的有 30 種 (4) (a,b,c) 可圍成直角三角形的有 1 種
 (5) (a,b,c) 可圍成三角形的有 58 種。

答：(1)(2) (108 課綱第二冊第三章排列組合機率)

解：(1)共有 $4^3 = 64$ 種

(2)有 4 種

(3)有 $\frac{3!}{2!} \times \underbrace{10} + 3! \times \underbrace{10} = 34$ 種

$(4,4,6), (6,6,4), (6,6,8), (6,6,10), (4,4,4), (6,6,6), (8,8,4), (8,8,6), (8,8,10), (10,10,4), (10,10,6), (10,10,8), (8,8,8), (10,6,10,10)$

(4)有 $\frac{3!}{1} = 6$ 種
(6, 8, 10)

(5)有 $64 - \frac{3!}{2!} \times \underbrace{2} - 3! \times \underbrace{1} = 64 - 6 - 6 = 52$ 種。
 $(4,4,8), (4,4,10), (4,6,10)$

三、選填題 (占 25 分)

13. 某一種病毒肆虐全臺，此病毒經過 t 週後全臺受到感染的比率為

$f(t) = \frac{1}{2 + a \times 7^{bt}} \times 100\%$ ，已知一開始時有 1% 的人受到感染；經過了一週之後，有 25% 的人受到感染，則 b 的值為_____。

答：-2 (108 課綱第一冊第一章指數)

解： $f(0) = \frac{1}{2+a} \times 100\% = 1\% \Rightarrow a = 98$

$f(1) = \frac{1}{2+a \times 7^b} \times 100\% = 25\% \Rightarrow b = -2$

14. 一個三角形的三邊長分別為 a, b, c ，其內切圓半徑為 r ，外接圓半徑為 R ，已知 $a+b+c:abc=1:72$ ，則 $R+r$ 的最小值為_____。

答：無解 (題目疑有誤) (108 課綱第二冊第四章三角比)

解： $a+b+c=2S$ ， $abc=144S$

$\Delta = \frac{abc}{4R} = rS \Rightarrow R = \frac{144S}{4\Delta}$ ， $r = \frac{\Delta}{S}$

$R+r \geq 2\sqrt{Rr} = 2\sqrt{\frac{144S}{4\Delta} \times \frac{\Delta}{S}} = 12$ (但等號不成立，故無最小值)

15. 在坐標平面上，已知由四個不等式 $x-y \geq 0$ ， $x-y \leq 10$ ， $x+y \geq 0$ ， $x+y \leq 10$ 所圍成的區域為 Ω ，若有一圓 Γ 使得 Ω 完全落在圓 Γ 的邊界或內部，則圓 Γ 的最小面積為_____ π 。

答： 25π (108 課綱第一冊第二章線性不等式+圓)

解： $(x-5)^2 + y^2 \leq 5^2$

16. 設 a, b 皆為正實數，且滿足 $\frac{2022}{a+b} - \frac{2022}{a} + \frac{2022}{b} = 0$ ，

則 $\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \left(\frac{a}{b}\right)^3$ 的值为_____。(化為最簡根式)

答： $2\sqrt{5}$ (108 課綱第一冊第一章乘法公式)

解： 原式 $\Rightarrow \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 0 \Rightarrow ab - b(a+b) + a(a+b) = 0$

$$\Rightarrow ab + a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (\text{取正})$$

$$\text{故 } \frac{b}{a} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \sqrt{5}$$

$$\text{所求} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

17. 有三個半徑分別為 1, 2, 3 的圓，且這三個圓兩兩外切，切點分別為 A, B, C ，則 $\triangle ABC$ 的面積為_____。(化為最簡分數)

答： $\frac{6}{5}$ (108 課綱第二冊第四章三角比)

解： $S = \frac{1}{2}(3+4+5) = 6$ ， $\Delta = \sqrt{6 \times 3 \times 2 \times 1} = 6$

$$\text{所求} = \left(1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} - \frac{2}{3} \times \frac{2}{5}\right) \times 6 = \frac{6}{5}$$

第貳部分：混合題或非選擇題 (占 15 分)

18-20 題為題組

賴老師到自助餐店吃飯都固定選一個主食、一個主菜和一個配菜，其中主食有白飯、紫米飯、炒飯、粥四種選擇，主菜有雞腿、排骨、爌肉三種選擇，配菜有荷包蛋、豆芽菜兩種選擇。根據上述資料，試回答下列問題。(108 課綱第二冊第三章排列組合機率)

18. 賴老師吃飯的所有搭配組合數為下列哪一個選項？(單選題)

(1)6 種 (2)24 種 (3)60 種 (4)72 種 (5)144 種。

答： (2)

解： $4 \times 3 \times 2 = 24$

19. 如果賴老師打算不吃澱粉，所以不選主食，然後選兩個不一樣的主菜搭配一個配菜，則賴老師吃飯的所有搭配組合數有_____種。

答： 6

解： $C_2^3 \times 2 = 6$

20. 有一天賴老師跟自助餐阿姨說：『我吃粥不配荷包蛋，而且只要一吃爌肉，就一定要配白飯，現在開始我天天來吃一次，你知道我要吃幾天才可以把所有搭配都吃過一遍呢？』請幫自助餐阿姨計算，賴老師需要連續吃幾天就可以把所有搭配都吃過一遍。

答：16

$$\text{解： } \underbrace{4 \times 3 \times 2}_{\text{全}} - \underbrace{1 \times 3 \times 1}_{\substack{\text{粥} \\ + \text{任意肉} \\ + \text{豆芽菜}}} - \underbrace{3 \times 1 \times 2}_{\substack{\text{非白飯} \\ + \text{爌肉} \\ + \text{任意菜}}} + \underbrace{1 \times 1 \times 1}_{\substack{\text{粥} \\ + \text{爌肉} \\ + \text{豆芽菜}}} = 24 - 3 - 6 + 1 = 16$$