

臺北區 111 學年度第一學期第一次學測模擬考

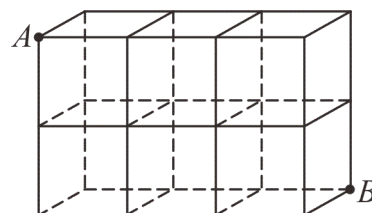
數學 A(111-B1)



第壹部分：選擇題(占 85 分)

一、單選題(占 30 分)

- 小茂在計算機上依序按下 **2** **x^y** **1** **0** **=** 鍵，計算出 2^{10} 的值，接著連按了 2 次 **log** 鍵，則在面板上出現的數字最接近下列哪一個選項？
(1)0.3 (2)0.5 (3)1 (4)3 (5)10。
- 已知多項式函數 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 14$ ，則 $y = f(x)$ 的圖形在 $x = 2$ 附近的一次近似直線斜率為下列何者？
(1)-4 (2)-1 (3)1 (4)3 (5)23。
- 已知兩直線 $L_1 : 5x + 12y = 60$ 、 $L_2 : 12x + 5y = 60$ ，則下列哪一個選項之直線與 L_1 、 L_2 所圍出的三角形面積最大？
(1) $M_1 : 3x - 4y = -10$ (2) $M_2 : 3x - 4y = -5$ (3) $M_3 : 3x - 4y = 0$
(4) $M_4 : 3x - 4y = 5$ (5) $M_5 : 3x - 4y = 10$ 。
- 右圖的長方體是由六個大小相同的小正立方體所組成，請問由頂點 A 沿著正立方體的稜邊走捷徑(僅能向右「 \rightarrow 」、向下「 \downarrow 」、向後「 \nearrow 」)到頂點 B 的走法有幾種？
(1)20 種 (2)36 種 (3)54 種 (4)60 種 (5)72 種。
- 現有兩個糖果盒 A 、 B ，當中各有 3 顆糖果。你以均等機會隨機選一個盒子並吃掉當中的一顆糖果，重複這個過程直到你吃掉其中一個盒子的最後一顆糖果為止。假設停止時另一個盒子裡恰有 X 顆糖果，則 X 的期望值為何？
(1) $\frac{3}{2}$ 顆 (2) $\frac{8}{5}$ 顆 (3) $\frac{5}{3}$ 顆 (4) $\frac{15}{8}$ 顆 (5)2 顆。
- 某大學 $\bigcirc\bigcirc$ 系隨機觀察了 3 名學生 A 、 B 、 C 的「大學畢業成績(分)」與入學時「學測科目成績(級分)」如附表，請問下列哪個「學測科目成績」與「大學畢業成績」的相關係數最大？
(1)國文 (2)英文 (3)數學
(4)社會 (5)自然。



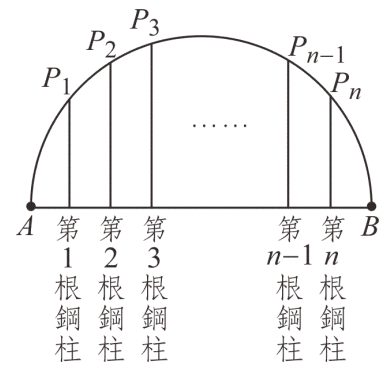
	A	B	C
大學畢業成績	90	80	70
學測國文成績	11	14	10
學測英文成績	12	11	13
學測數學成績	13	9	12
學測社會成績	14	12	11
學測自然成績	10	13	14

二、多選題(占 30 分)

- 在坐標平面上， $\triangle ABC$ 三個頂點的坐標分別為 $A(0,3)$ 、 $B(2,0)$ 、 $C(4,1)$ 。
試選出正確的選項。
(1) $\sin A < \sin C$ (2) $\cos B = \frac{1}{5}$ (3) $\triangle ABC$ 為銳角三角形
(4)令 D 為 \overline{AC} 上的點且 $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ，則 $\sin B = \frac{\overline{AC} \times \overline{BD}}{\overline{AB} \times \overline{BC}}$ (5) $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 $\frac{5\sqrt{13}}{8}$ 。
- 已知多項式函數 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 滿足 $f(1) = f(2) = 3$ 且 $f(-1) = -3$ 。試選出正確的選項。
(1) $f(x)$ 的各項係數和為 3 (2) $f(x)$ 除以 $(x-2)$ 的餘式為 3
(3) $f(x)$ 的常數項為 -3 (4) $(x+1)f(x)$ 除以 $(x-1)$ 的餘式為 3
(5) $y = f(x)$ 圖形的對稱中心為 $(1,3)$ 。

9. 下列方程式中，請選出有實數解的選項。 (1) $|x+2|+|x-3|=1$ (2) $|x+2|+|x-3|=6$
 (3) $|x+2|-|x-3|=1$ (4) $|x+2|-|x-3|=6$ (5) $|x+2|-|x-3|=-1$ 。

10. 如圖，設計師預計於相距100公尺的 A 、 B 兩地建造一個半圓形拱橋，並於水平橋面 \overline{AB} 上每間隔 x 公尺的距離豎立一根鋼柱至拱橋頂端，鋼柱與拱橋頂端的接點為 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ 。試選出正確的選項。



- (1) 若 $x=5$ ，分別從 A 、 B 兩地朝第11根鋼柱與拱橋頂端接點 P_{11} 拉繩並綁緊成直線，則 $\angle AP_{11}B = 90^\circ$
 (2) 若 $x=5$ ，則自 A 地算起的第3根鋼柱與第6根鋼柱高度相同
 (3) 「 $x=4$ 時，自 A 地算起的第9根鋼柱高度」比「 $x=5$ 時，自 A 地算起的第8根鋼柱高度」還要低
 (4) 欲使某一根鋼柱高度為 $25\sqrt{3}$ 公尺，則 x 的值可為5
 (5) 相鄰兩鋼柱與拱橋頂端的接點距離皆相同，即 $\overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \dots = \overline{P_{n-1}P_n}$ 。

11. 心血管系統把血液輸送至全身各處，系統運作要能減少心臟打出血液所需能量，特別是降低血管阻力。根據泊醉定律(Poiseuille's law)，血液流經血管所產生的阻力 R 和流經血管長度 L 成正比，和血管半徑 r 的四次方成反比，

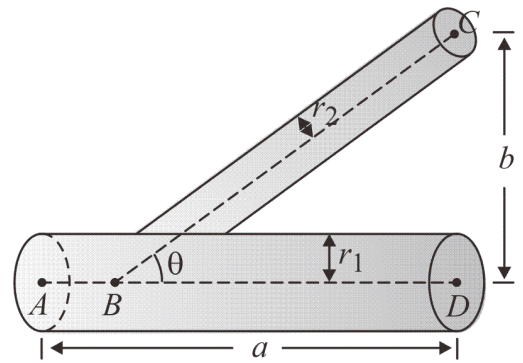
亦即 $R = \lambda \cdot \frac{L}{r^4}$ ，其中 λ 為一正值常數。如下圖，

一條半徑為 r_1 的主血管，及一條與主血管夾角為 θ 、半徑為 r_2 的較小分支血管，且經證明，當

$\cos \theta = \frac{r_2^4}{r_1^4}$ 時，血液流過 AB 段和 BC 段所產生的

血管阻力總和為最小。若 $r_1 = 10^{0.25}$ ， $r_2 = 2^{0.75}$ ，

$a = 20$ ， $b = 12$ ，其中 $a = \overline{AD}$ ， $b = \overline{CD}$ ，且 $\overline{AD} \perp \overline{CD}$ ，若在血液流過 AB 段和 BC 段所產生的血管阻力總和為最小的情形之下，則下列選項哪些正確？(1) $r_2^4 = 8$ (2) $\cos \theta = \frac{4}{5}$



(3) $\overline{BC} = 20$ (4) $\overline{AB} = 4$ (5) 血液流過 AB 段和 BC 段所產生的血管阻力總和為 2.9λ 。

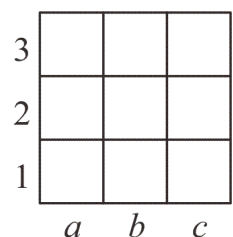
12. 給定一圓心 $A(3, -1)$ ，半徑為2的圓 C ，與一直線 $L: y = mx$ ，其中 $m < 0$ ；已知直線 L 和圓 C 相交於 P 、 Q 兩點，以點 P 、 Q 為切點的兩切線互相垂直於 R 點。試選出正確的選項。

- (1) ΔPAQ 的面積為4 (2) 在圓 C 上有4個點到直線 L 的距離等於1
 (3) $m = -\frac{1}{7}$ (4) $R(1, -3)$ (5) ΔPQR 的外接圓為 $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 2$ 。

三、選填題(占 25 分)

13. 已知有一組數據 (x_i, y_i) ， $i = 1, 2, \dots, 10$ ，其中 x 、 y 的算術平均數分別為8、5，且 x 和 y 的相關程度為高度相關，若 y 對 x 的最適直線通過點 $(3, 2)$ ，則當 $x = -22$ 時可預測 $y =$ _____。

14. 將任意數量的士兵棋子，放置於 3×3 的棋盤上，如圖，每個格子至多只能放一個士兵，且放完後使得每行與每列都有奇數個士兵，則共有 _____ 種不同的放置情形。



15. 已知 $B(x, y)$ 為坐標平面上異於 $O(0, 0)$ ， $A(4, 2)$ 的點，且 $\angle OBA = 90^\circ$ ，則滿足此條件之格子點 $(B(x, y))$ 坐標皆為整數的點共有 _____ 個。

16. 已知 A 、 B 兩點的極坐標為 $A[4, \alpha]$ 、 $B[2, \beta]$ ，其中 $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ 、 $-45^\circ \leq \beta \leq 0^\circ$ 。若 A 、 B 兩點之斜率的最小值為 a ，最大值為 b ，則 $a+b =$ _____。(化為最簡根式)

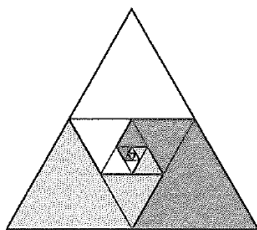
17. 設 $f(x)$ ， $g(x)$ 皆為實係數多項式，其中 $y = f(x)$ 的首項係數為 1， $y = g(x)$ 的圖形為開口向上的拋物線，已知 $(g(x))^2$ 和 $g(x)$ 分別除以 $f(x)$ 的餘式皆為 $\frac{1}{2}x$ ，則不等式 $f(x) \leq 0$ 的整數解有 _____ 個。

第貳部分：混合題或非選擇題

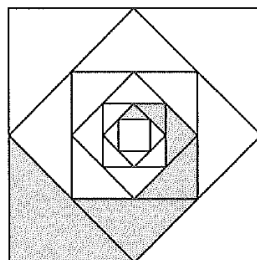
18-20 題為題組

根據自然期刊網站 (<https://doi.org/10.1038/s41427-020-0201-3>) 刊載文章指出，研究學者利用 STM 顯微鏡發現，在石墨分子上所形成的 chiral Kagomé- α 納米結構，是 Baravelle Spiral 三角三聚體。

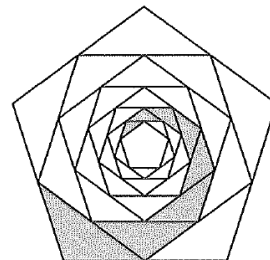
觀察下圖，他們是在不同的正多邊形中製造 Baravelle Spiral (螺線的一種) 的方式。圖(一)~(四)分別是正三、四、五、六邊形，今在每個正多邊形中以其各邊的中點為頂點，再連成新的小正多邊形，依照此規律一直持續進行，黑灰色部分可視為 Baravelle Spiral 所分割出的圖形。例如圖(一)中 Baravelle Spiral 可分割出面積相等的三塊圖形：



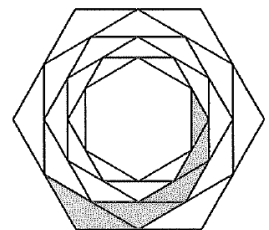
圖(一)



圖(二)



圖(三)



圖(四)

18. 圖(二)中共有 7 個由大至小的正方形，假設其中最大的正方形面積為 S ，最小的正方形面積為 T ，且圖(二)中灰色區域的面積為 $\frac{S-mT}{n}$ ，則數對 $(m, n) =$ _____。

(選填題，3 分)

19. 觀察圖(三)的灰色區域，它是由 8 個由大至小的等腰三角形所組成，若他們的面積可形成一個等比數列，求此等比數列的公比。(非選擇題，6 分)

20. 若圖(四)中最大的正六邊形面積為 6，試求其灰色區域的 5 個等腰三角形的面積和。(非選擇題，6 分)

RA292 臺北區 111 學年度第一學期第一次學測模擬考數學 A(111-B1)

參考答案

選擇題：1. (2) 2. (2) 3. (5) 4. (4) 5. (4) 6. (4) 7. (1)(4)(5) 8. (1)(2)(5) 9. (2)(3)(5)
10. (1)(3)(4) 11. (1)(2)(3)(4)(5) 12. (4)(5)

選填題：13. -13 14. 16 15. 6 16. $-1-2\sqrt{2}$ 17. 3

混合題：18. (1, 4) 19. $\frac{3+\sqrt{5}}{8}$ 20. $\frac{781}{1024}$