數學考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(2)	(2)	(5)	(4)	(4)	(4)	(1)(4)(5)
8.	9.	10.	11.	12.		
(1)(2)(5)	(2)(3)(5)	(1)(3)(4)	(1)(2)(3)(4)(5)	(4)(5)		

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (2)

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：常用對數

解析：$\because \log 2 \approx 0.3010 \quad \therefore 2 \approx 10^{0.3010}$，則 $2^{10} \approx (10^{0.3010})^{10} = 10^{3.01}$

$\therefore \log(\log(2^{10})) \approx \log(\log(10^{3.01})) = \log 3.01 \approx \log 3 \approx 0.4771$

故選(2)。

2. (2)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：三次函數，一次近似

解析：$f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 14 = (x-2)^3 - 3(x-2)^2 - (x-2) + 4$

$\therefore$ 在 $x=2$ 附近的一次近似直線為 $y = -(x-2)+4$

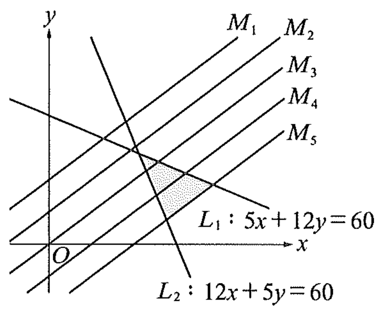
其斜率為 -1，故選(2)。

3. (5)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：直線方程式

解析：作圖如下



由圖可知，兩直線與 M_5 所圍出的面積最大，故選(5)。

4. (4)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：不完全相異物的直線排列

解析：走法為 →→→↓↓↗ 的排列數，

即 $\dfrac{6!}{3!2!1!} = 60$ 種，故選(4)。

5. (4)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：期望值

解析：剩下三顆糖果的機率 $= P(AAA) + P(BBB) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{4}$

剩下兩顆糖果的機率

$= P(AABA) + P(ABAA) + P(BAAA) + P(BBAB) + P(BABB)$

$+ P(ABBB) = \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$

剩下一顆糖果的機率 $= 1 - \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{8} = \dfrac{3}{8}$

$\therefore$ 剩下糖果顆數的期望值 $= 3\times\dfrac{1}{4} + 2\times\dfrac{3}{8} + 1\times\dfrac{3}{8} = \dfrac{15}{8}$

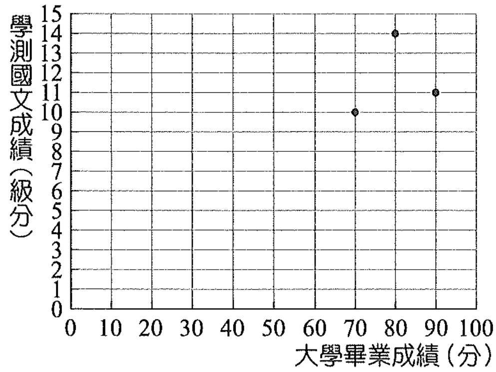
故選(4)。

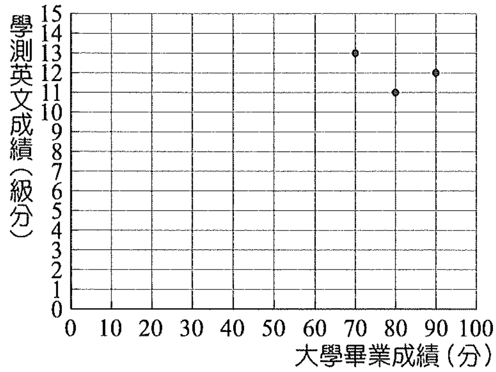
6. (4)

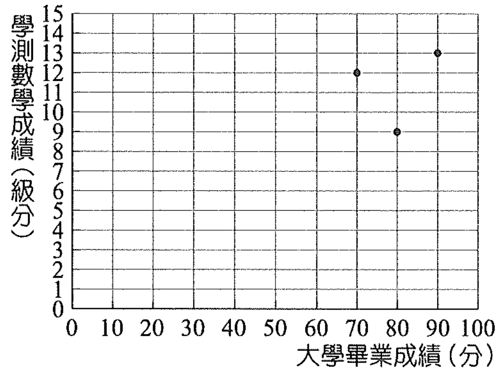
出處：第二冊〈數據分析〉

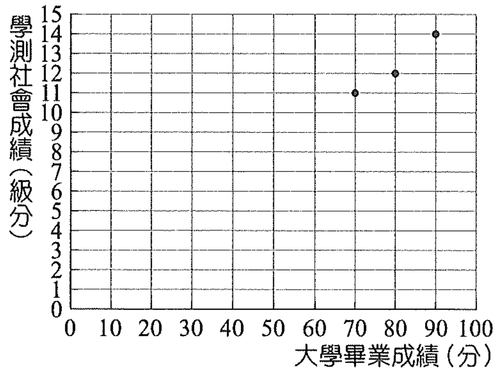
目標：散布圖，相關係數

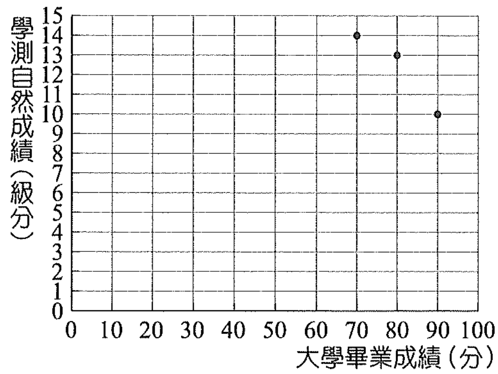
解析：畫出散布圖如下：











可觀察出學測社會成績和大學畢業成績幾乎成一斜率為正的直線，即相關係數最大，故選(4)。

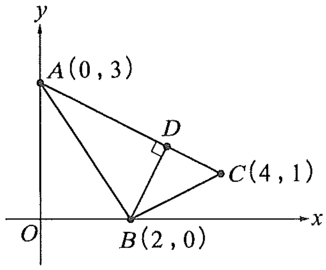
二、多選題

7. (1)(4)(5)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：正弦定理，餘弦定理，面積公式

解析：



(1) ○：∵ $\overline{BC}=\sqrt{5}<\sqrt{13}=\overline{AB}$

由正弦定理

∵ $\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{AB}}{\sin C}$　∴ $\sin A<\sin C$

(2) ╳：$\overline{AC}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$，由餘弦定理，

$\cos B=\frac{13+5-20}{2\times\sqrt{13}\times\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{65}}{65}$

(3) ╳：∵ $\cos B=-\frac{\sqrt{65}}{65}<0$

∴△ABC 為鈍角三角形

(4) ○：由面積公式，得△ABC 面積為

$\frac{\overline{AC}\times\overline{BD}}{2}=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B$

∴ $\sin B=\frac{\overline{AC}\times\overline{BD}}{\overline{AB}\times\overline{BC}}$

(5) ○：由 $\cos B=-\frac{\sqrt{65}}{65}$，得 $\sin B=\frac{8\sqrt{65}}{65}$，

由正弦定理，外接圓半徑為

$\frac{1}{2}\times\frac{\overline{AC}}{\sin B}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{65}}{8}=\frac{5\sqrt{13}}{8}$

故選(1)(4)(5)。

8. (1)(2)(5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：除法原理，餘式定理，三次函數的圖形對稱中心

解析：(1) ○：$f(x)$ 的各項係數和為 $f(1)=3$

(2) ○：$f(x)$ 除以 $(x-2)$ 的餘式為 $f(2)=3$

(3) ╳：設 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-k)+3$

$f(-1)=-3$ 代入，得

$(-2)\times(-3)\times(-1-k)+3=-3 \Rightarrow k=0$

故 $f(x)$ 的常數項為 $3\neq-3$

(4) ╳：$(x+1)f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)x+3(x+1)$

$x=1$ 代入得 $3(1+1)=6\neq3$

(5) ○：∵ $f(x)$ 圖形通過 $(0 , 3)$、$(1 , 3)$、$(2 , 3)$ 三點

∴對稱中心為 $(1 , 3)$

故選(1)(2)(5)。

9. (2)(3)(5)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：絕對值方程式

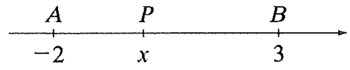
解析：在數線上，

$|x+2|=|x-(-2)|$ 表 $P(x)$ 與 $A(-2)$ 的距離

$|x-3|$ 表 $P(x)$ 與 $B(3)$ 的距離

分以下兩種情形討論：

(i) 若 P 在 $\overline{AB}$ 上：



則 $|x+2|+|x-3|=\overline{AB}=5$，

$-5<|x+2|-|x-3|<5$

(ii) 若 P 不在 $\overline{AB}$ 上：

則 $|x+2|+|x-3|>\overline{AB}=5$，

$|x+2|-|x-3|=5$ 或 -5

由(i)、(ii)得，

$|x+2|+|x-3|\geq5$，$-5\leq|x+2|-|x-3|\leq5$

故選(2)(3)(5)。

10. (1)(3)(4)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：算幾不等式

解析：(1) ○：∵ $\overline{AB}$ 為半圓的直徑

∴ $\angle AP_iB=90^\circ (i=1 , 2 , \cdots\cdots , n)$

(2) ╳：若 $x=5$，即有 $(100\div5)-1=19$ 根鋼柱

自 A 地算起的第 3 根鋼柱低於第 6 根鋼柱高度

(3) ○：若 $x=4$ 時，即有 $(100\div4)-1=24$ 根鋼柱

自 A 地算起的第 9 根鋼柱高度為

$\sqrt{36\times64}=\sqrt{2304}$

若 $x=5$ 時，

自 A 地算起的第 8 根鋼柱高度為

$\sqrt{40\times60}=\sqrt{2400}$

(4) ○：$25\sqrt{3}=\sqrt{25\times75}$　∴ x 的值可為 5

(5) ╳：相鄰兩鋼柱與拱橋頂端的接點距離不一定相同

故選(1)(3)(4)。

11. (1)(2)(3)(4)(5)

出處：第一冊〈指數、對數〉、第二冊〈三角比〉

目標：指數的應用，三角比

解析：(1) ○：$r_2^{\,4}=(2^{0.75})^4=2^3=8$

(2) ○：$\cos\theta=\frac{r_2^{\,4}}{r_1^{\,4}}=\frac{8}{(10^{0.25})^4}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

(3) ○：由 $\cos\theta=\frac{4}{5}$

$\Rightarrow \sin\theta=\frac{3}{5}=\frac{12}{\overline{BC}}$

$\Rightarrow \overline{BC}=20$

(4) ○：$\overline{AB}=\overline{AD}-\overline{BD}=a-\overline{BC}\times\cos\theta$

$=20-20\times\frac{4}{5}$

$=20-16=4$

(5) ○：血管阻力總和最小值為

$\lambda\cdot\frac{4}{r_1^{\,4}}+\lambda\cdot\frac{20}{r_2^{\,4}}=\lambda\cdot\frac{4}{10}+\lambda\cdot\frac{20}{8}=2.9\lambda$

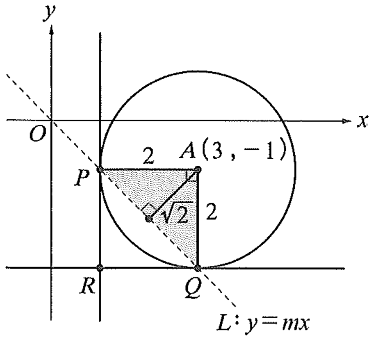
故選(1)(2)(3)(4)(5)。

12. (4)(5)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：圓與直線的關係，點到直線的距離，對稱點

解析：由題意知，四邊形 $APRQ$ 為邊長 2 的正方形



(1)╳：$\triangle PAQ$ 的面積為 $2\neq 4$

(2)╳：圓心到直線 L 的距離為 $\sqrt{2}$

∴在圓 C 上僅有 2 個點到直線 L 的距離等於 1，並非 4 個

(3)╳：由點到直線的距離

$d(A,L)=\dfrac{|3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}\Rightarrow m=-1$ 或 $\dfrac{1}{7}$，取負

(4)○：∵直線 L 的方程式為 $y=-x$，且 R 為圓心對直線 L 的對稱點

∴$R(1,-3)$

(5)○：$\triangle PQR$ 的外接圓為以 $\overline{AR}$ 為直徑的圓，

方程式為 $(x-2)^2+(y+2)^2=2$

故選(4)(5)。

三、選填題

13. -13

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：最適直線方程式

解析：由題意可設最適直線方程式為 $(y-5)=m(x-8)$，

$(3,2)$ 代入得 $m=\dfrac{3}{5}$

即直線方程式為 $3x-5y=-1$

將 $x=-22$ 代入得 $y=-13$。

14. 16

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：排列組合

解析：$333\to 1$ 種

$311\to 9$ 種

$111\to 6$ 種

∴共 16 種。

15. 6

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：圓方程式

解析：求以 $\overline{OA}$ 為直徑的圓方程式：

$(x-2)^2+(y-1)^2=5$，則 B 點會落在圓周上

滿足此圓方程式之格子點 B 坐標 (x,y) 討論如下：

x	4	0	3	3	1	1
y	0	2	3	-1	3	-1

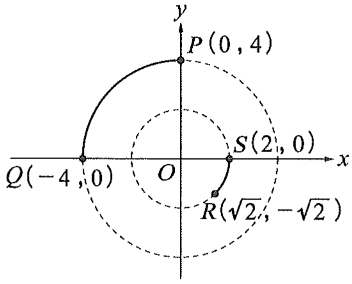
故共有 6 個點。

16. $-1-2\sqrt{2}$

出處：第一冊〈直線與圓〉、第二冊〈三角比〉

目標：極坐標，直線的斜率

解析：依題意作圖如下，



斜率的最小值為 $a=m_{PR}=\dfrac{4-(-\sqrt{2})}{0-\sqrt{2}}$

$=-1-2\sqrt{2}$

斜率的最大值為 $b=m_{QS}=0$

故所求 $a+b=-1-2\sqrt{2}$。

17. 3

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：除法原理，多項式不等式

解析：由除法原理，設 $g(x)$ 除以 $f(x)$ 的商式為 $q(x)$，

由題目知餘式為 $\dfrac{1}{2}x$

$\Rightarrow g(x)=f(x)\cdot q(x)+\dfrac{1}{2}x$

∵ $g(x)$ 為二次多項式，且 $g(x)$ 除以 $f(x)$ 的餘式為一次式，故 $f(x)$ 為二次多項式

∴商式 $q(x)$ 為常數，可令 $q(x)=a$，a 為實數

故 $g(x)=af(x)+\dfrac{1}{2}x$ ……………………①

將①平方得

$(g(x))^2=\left(af(x)+\dfrac{1}{2}x\right)^2$

$=a^2\cdot(f(x))^2+2\cdot af(x)\cdot\dfrac{1}{2}x+\dfrac{x^2}{4}$

$=f(x)\cdot(a^2\cdot f(x)+ax)+\dfrac{x^2}{4}$ ……………②

由除法原理可設

$\dfrac{x^2}{4}=f(x)\cdot b+r(x)$ ……………………③

$b\neq 0$，其中 $r(x)=0$ 或 $\deg(r(x))<\deg(f(x))=2$

再代回②可得

$(g(x))^2=f(x)\cdot(a^2\cdot f(x)+ax)+\dfrac{x^2}{4}$

$=f(x)\cdot(a^2\cdot f(x)+ax)+f(x)\cdot b+r(x)$

$=f(x)\cdot(a^2\cdot f(x)+ax+b)+r(x)$

又 $r(x)=0$ 或 $\deg(r(x))<\deg(f(x))=2$，

且 $(g(x))^2$ 除以 $f(x)$ 的餘式 $\dfrac{1}{2}x$，

由除法原理的唯一性得 $r(x)=\dfrac{1}{2}x$

故③可寫成 $\dfrac{x^2}{4}=f(x)\cdot b+\dfrac{1}{2}x$

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{4b}\cdot(x^2-2x)=\dfrac{1}{4b}\cdot x(x-2)$

又 $y=f(x)$ 的首項係數為 1，

故 $f(x)=x(x-2)$

得 $f(x)=x(x-2)\le 0$ 的解為 $0\le x\le 2$

故 $f(x)\le 0$ 的整數解有 0，1，2，共 3 個。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. (1 , 4)

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：數列

解析：依圖(二)，

可看出所求灰色區域的面積為 $\dfrac{S-T}{4}$

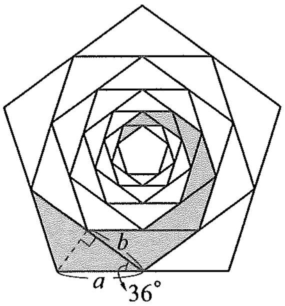
故數對 $(m\,,n)=(1\,,4)$。

19. $\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$

出處：第二冊〈數列與級數〉、第二冊〈三角比〉

目標：等比數列，三角比

解析：



如上圖，

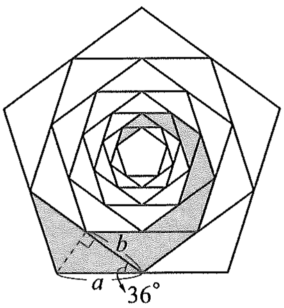
可知兩等腰三角形為相似形，且邊長比為 $a:b$

且 $\dfrac{b}{a}=\cos 36^\circ$

∵面積比＝邊長平方比

∴公比 $=\cos^2 36^\circ=\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$。

◎評分原則



如上圖，

可知兩等腰三角形為相似形，且邊長比為 $a:b$ (2 分)

且 $\dfrac{b}{a}=\cos 36^\circ$ (1 分)

∵面積比＝邊長平方比 (1 分)

∴公比 $=\cos^2 36^\circ=\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$。 (2 分)

20. $\dfrac{781}{1024}$

出處：第二冊〈數列與級數〉、第二冊〈三角比〉

目標：等比數列，三角比

解析：〈解法一〉

同第 19. 題

相鄰正六邊形的面積比為 $\cos^2 30^\circ=\dfrac{3}{4}$

最小正六邊形的面積為 $6\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^5=\dfrac{729}{512}$

同第 18. 題，所求灰色面積為 $\dfrac{6-\dfrac{729}{512}}{6}=\dfrac{781}{1024}$。

〈解法二〉

同第 19. 題，

相鄰正六邊形的面積比為 $\cos^2 30^\circ=\dfrac{3}{4}$

相鄰等腰三角形的面積比亦為 $\dfrac{3}{4}$

由最大正六邊形面積為 6，

則第二大的正六邊形面積為 $6\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{2}$

則同第 18. 題，

灰色面積中最大塊的等腰三角形面積為 $\dfrac{6-\dfrac{9}{2}}{6}=\dfrac{1}{4}$

故灰色面積為 $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^4$

$=\dfrac{\dfrac{1}{4}\left(1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^5\right)}{1-\dfrac{3}{4}}=\dfrac{781}{1024}$。

◎評分原則

〈解法一〉

同第 19. 題

相鄰正六邊形的面積比為 $\cos^2 30^\circ=\dfrac{3}{4}$ (2 分)

最小正六邊形的面積為 $6\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^5=\dfrac{729}{512}$ (2 分)

同第 18. 題，所求灰色面積為 $\dfrac{6-\dfrac{729}{512}}{6}=\dfrac{781}{1024}$。 (2 分)

〈解法二〉

同第 19. 題，

相鄰正六邊形的面積比為 $\cos^2 30^\circ=\dfrac{3}{4}$

相鄰等腰三角形的面積比亦為 $\dfrac{3}{4}$ (2 分)

由最大正六邊形面積為 6，

則第二大的正六邊形面積為 $6\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{2}$

則同第 18. 題，

灰色面積中最大塊的等腰三角形面積為 $\dfrac{6-\dfrac{9}{2}}{6}=\dfrac{1}{4}$ (2 分)

故灰色面積為 $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^4$

$=\dfrac{\dfrac{1}{4}\left(1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^5\right)}{1-\dfrac{3}{4}}=\dfrac{781}{1024}$。 (2 分)-