台北區高中 112 年(111 學年度)高三上
第一次學測模擬考　數學試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 小茂在計算機上依序按下 2 x^y 1 0 = 鍵，計算出 2^{10} 的值，接著連按了 2 次 log 鍵，則在面板上出現的數字最接近下列哪一個選項？
(1) 0.3　(2) 0.5　(3) 1　(4) 3　(5) 10。

答：(2)

解：$\log\left(\log 2^{10}\right) \fallingdotseq \log(10\times 0.3010) \fallingdotseq \log 3.01 \fallingdotseq 0.477\cdots$

2. 已知多項式函數 $f(x)=x^3-9x^2+23x-14$，則 $y=f(x)$ 的圖形在 $x=2$ 附近的一次近似直線斜率為下列何者？
(1) -4　(2) -1　(3) 1　(4) 3　(5) 23。

答：(2)

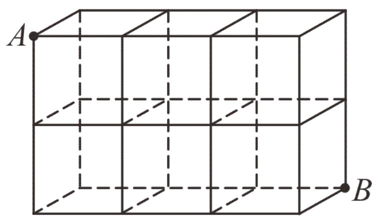
解：綜合除法 $f(x)=(x-2)^3-3(x-2)^2\underbrace{-(x-2)+4}_{一次近似\ y=-(x-2)+4}$

3. 已知兩直線 L_1：$5x+12y=60$、L_2：$12x+5y=60$，則下列哪一個選項之直線與 L_1、L_2 所圍出的三角形面積最大？
(1) M_1：$3x-4y=-10$　(2) M_2：$3x-4y=-5$　(3) M_3：$3x-4y=0$
(4) M_4：$3x-4y=5$　(5) M_5：$3x-4y=10$。

答：(5)

解：L_1、L_2 交於 $\left(\dfrac{60}{17},\dfrac{60}{17}\right)$，與 M_5 距離最遠

4. 右圖的長方體是由六個大小相同的小正立方體所組成，請問由頂點 A 沿著正立方體的稜邊走捷徑（僅能向右「→」、向下「↓」、向後「↗」）到頂點 B 的走法有幾種？
(1) 20 種　(2) 36 種　(3) 54 種
(4) 60 種　(5) 72 種。



答：(4)

解：右右右下下後 $\Rightarrow \dfrac{6!}{3!2!1!}=60$ 種

5. 現有兩個糖果盒 A 、 B ，當中各有3顆糖果。你以均等機會隨機選一個盒子並吃掉當中的一顆糖果，重複這個過程直到你吃掉其中一個盒子的最後一顆糖果為止。假設停止時另一個盒子裡恰有 X 顆糖果，則 X 的期望值為何？

(1) $\frac{3}{2}$ 顆　(2) $\frac{8}{5}$ 顆　(3) $\frac{5}{3}$ 顆　(4) $\frac{15}{8}$ 顆　(5) 2 顆。

答：(4)

解： $E(X)=\underbrace{3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 2}_{AA\underline{A},BB\underline{B}}+\underbrace{2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\times C_1^3\times 2}_{AAB\underline{A},BBA\underline{B}}+\underbrace{1\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\times C_2^4\times 2}_{AABB\underline{A},BBAA\underline{B}}$

$=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}=\frac{15}{8}$

6. 某大學○○系隨機觀察了3名學生 A 、 B 、 C 的「大學畢業成績（分）」與入學時「學測科目成績（級分）」如附表，請問下列哪個「學測科目成績」與「大學畢業成績」的相關係數最大？

(1)國文　(2)英文　(3)數學
(4)社會　(5)自然。

	A	B	C
大學畢業成績	90	80	70
學測國文成績	11	14	10
學測英文成績	12	11	13
學測數學成績	13	9	12
學測社會成績	14	12	11
學測自然成績	10	13	14

答：(4)

解： 畢業與社會，均為 $A>B>C$

二、多選題

7. 在坐標平面上，ΔABC 三個頂點的坐標分別為 $A(0,3)$、$B(2,0)$、$C(4,1)$。試選出正確的選項。

(1) $\sin A<\sin C$　(2) $\cos B=\frac{1}{5}$

(3) ΔABC 為銳角三角形　(4)令 D 為 $\overline{AC}$ 上的點且 $\overline{BD}\perp\overline{AC}$ ，則 $\sin B=\frac{\overline{AC}\times\overline{BD}}{\overline{AB}\times\overline{BC}}$

(5) ΔABC 的外接圓半徑為 $\frac{5\sqrt{13}}{8}$ 。

答：(1)(4)(5)

解： $\overline{AB}=\sqrt{13}$ ，$\overline{BC}=\sqrt{5}$ ，$\overline{CA}=\sqrt{20}$ $\Rightarrow a<c$ ，$\sin A<\sin C$

$\cos B=\frac{5+13-20}{2\sqrt{5}\sqrt{13}}=\frac{-1}{\sqrt{65}}$ 為鈍角 Δ

ΔABC 面積 $=\frac{\overline{AC}\times\overline{BD}}{2}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B$ $\Rightarrow \sin B=\frac{\overline{AC}\times\overline{BD}}{\overline{AB}\times\overline{BC}}$

正弦定律：$\frac{\overline{CA}}{\sin B}=2R$ $\Rightarrow R=\frac{\sqrt{20}}{2\times\frac{8}{\sqrt{65}}}=\frac{5\sqrt{13}}{8}$

8. 已知多項式函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 滿足 $f(1)=f(2)=3$ 且 $f(-1)=-3$。試選出正確的選項。

(1) $f(x)$ 的各項係數和為 3　　(2) $f(x)$ 除以 $(x-2)$ 的餘式為 3

(3) $f(x)$ 的常數項為 -3　　(4) $(x+1)f(x)$ 除以 $(x-1)$ 的餘式為 3

(5) $y=f(x)$ 圖形的對稱中心為 $(1,3)$。

答：(1)(2)(5)

解：$f(x)=(x-1)(x-2)(x-p)+3 \xrightarrow{f(-1)=-3} p=0$

$f(x)=(x-1)(x-2)x+3=x^3-3x^2+2x+3=(x-1)^3+(x-1)+3$

$(x+1)f(x)=(x-1)(x-2)x(x+1)+3(x+1)=(x-1)Q(x)+6$

9. 下列方程式中，請選出有實數解的選項。

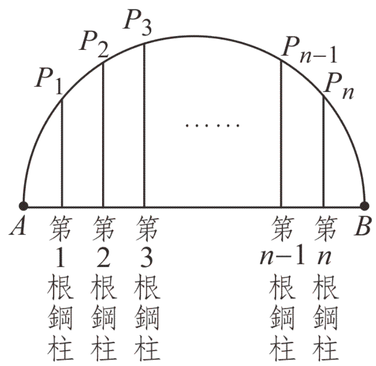
(1) $|x+2|+|x-3|=1$　　(2) $|x+2|+|x-3|=6$　　(3) $|x+2|-|x-3|=1$

(4) $|x+2|-|x-3|=6$　　(5) $|x+2|-|x-3|=-1$。

答：(2)(3)(5)

解：$|x+2|+|x-3|\ge 5$，$-5\le |x+2|+|x-3|\le 5$

10. 如圖，設計師預計於相距 100 公尺的 A、B 兩地建造一個半圓形拱橋，並於水平橋面 $\overline{AB}$ 上每間隔 x 公尺的距離豎立一根鋼柱至拱橋頂端，鋼柱與拱橋頂端的接點為 P_1，P_2，P_3，……，P_n。



試選出正確的選項。

(1) 若 $x=5$，分別從 A、B 兩地朝第 11 根鋼柱與拱橋頂端接點 P_{11} 拉繩並綁緊成直線，則 $\angle AP_{11}B=90°$

(2) 若 $x=5$，則自 A 地算起的第 3 根鋼柱與第 6 根鋼柱高度相同

(3)「$x=4$ 時，自 A 地算起的第 9 根鋼柱高度」比「$x=5$ 時，自 A 地算起的第 8 根鋼柱高度」還要低

(4) 欲使某一根鋼柱高度為 $25\sqrt{3}$ 公尺，則 X 的值可為 5

(5) 相鄰兩鋼柱與拱橋頂端的接點距離皆相同，即 $\overline{P_1P_2}=\overline{P_2P_3}=\cdots\cdots=\overline{P_{n-1}P_n}$。

答：(1)(3)(4)

解：(1) $\overline{AB}$ 為直徑 $\Rightarrow \angle AP_iB=90°$

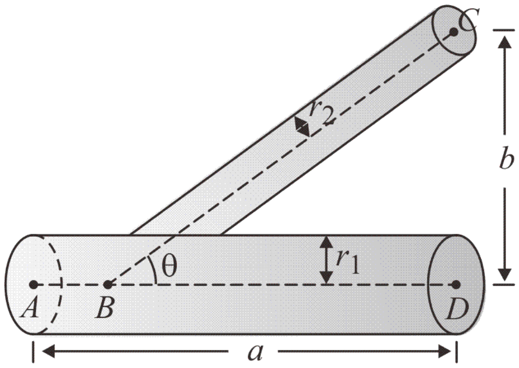
(2) $x=5$，$n=19$ $\Rightarrow P_3=P_{17}$，$P_6=P_{14}$

(3) $x=4$，$P_9=\sqrt{36\times 64}=\sqrt{2304}$，$x=5$，$P_8=\sqrt{40\times 60}=\sqrt{2400}$

(4) $25\sqrt{3}=\sqrt{25\times 75}$ $\Rightarrow 5\,|\,25$

(5) 圓心角不同

11. 心血管系統把血液輸送至全身各處，系統運作要能減少心臟打出血液所需能量，特別是降低血管阻力。根據帕醉定律（Poiseuille's law），血液流經血管所產生的阻力 R 和流經血管長度 L 成正比，和血管半徑 r 的四次方成反比，亦即 $R=\lambda\cdot\dfrac{L}{r^4}$，其中 λ 為一正值常數。如下圖，一條半徑為 r_1 的主血管，及一條與主血管夾角為 θ、半徑為 r_2 的較小分支血管，且經證明，當 $\cos\theta=\dfrac{r_2^4}{r_1^4}$ 時，血液流過 AB 段和 BC 段所產生的血管阻力總和為最小。



若 $r_1=10^{0.25}$，$r_2=2^{0.75}$，$a=20$，$b=12$，其中 $a=\overline{AD}$，$b=\overline{CD}$，且 $\overline{AD}\perp\overline{CD}$，若在血液流過 AB 段和 BC 段所產生的血管阻力總和為最小的情形之下，則下列選項哪些正確？

(1) $r_2^4=8$　(2) $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$　(3) $\overline{BC}=20$　(4) $\overline{AB}=4$

(5)血液流過 AB 段和 BC 段所產生的血管阻力總和為 2.9λ。

答：(1)(2)(3)(4)(5)

解：(1) $r_2^4=\left(2^{0.75}\right)^4=2^3=8$

(2) $r_1^4=\left(10^{0.25}\right)^4=10$，故 $\cos\theta=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$

(3) $\overline{BC}=b\csc\theta=12\times\dfrac{5}{3}=20$

(4) $\overline{BD}=6\cot\theta=12\times\dfrac{4}{3}=16\ \Rightarrow\ \overline{AB}=4$

(5) $R=R_{AB}+R_{BC}=\lambda\cdot\left[\dfrac{4}{10}+\dfrac{20}{8}\right]=\lambda\cdot\left[\dfrac{29}{10}\right]$

12. 給定一圓心 $A(3,-1)$，半徑為 2 的圓 C，與一直線 L：$y=mx$，其中 $m<0$；已知直線 L 和圓 C 相交於 P、Q 兩點，以點 P、Q 為切點的兩切線互相垂直於 R 點。試選出正確的選項。

(1) ΔPAQ 的面積為 4　　(2)在圓 C 上有 4 個點到直線 L 的距離等於 1

(3) $m=-\dfrac{1}{7}$　　(4) $R(1,-3)$

(5) ΔPQR 的外接圓為 $(x-2)^2+(y+2)^2=2$。

答：(4)(5)

解：$C:(x-3)^2+(y+1)^2=2^2$，圓心$A(3,-1)$

$P(1,-1)$，$Q(3,-3)$，$\overleftrightarrow{PQ}:y=-x$，$R(1,-3)$

$\overline{PQ}$中點$M(2,-2)$，$\overline{PM}=\overline{QM}=\sqrt{2}$ $\Rightarrow$外接圓$(x-2)^2+(y+2)^2=2$

ΔPAQ面積$=2\times2\times\frac{1}{2}=2$，$d(P,L)=1$有2個對應$P$點

三、選填題

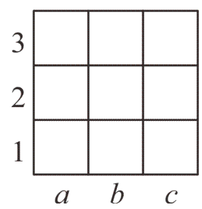
13. 已知有一組數據(x_i,y_i)，$i=1,2,\cdots,10$，其中x、y的算術平均數分別為8、5，且x和y的相關程度為高度相關，若y對x的最適直線通過點$(3,2)$，則當$x=-22$時可預測$y=$________。

答：-13

解：迴歸直線斜率$=\frac{5-2}{8-3}=\frac{3}{5}$

迴歸直線：$(y-5)=\frac{3}{5}(x-8)\xrightarrow{x=-22}$預測$y=-13$

14. 將任意數量的士兵棋子，放置於3×3的棋盤上，如圖，每個格子至多只能放一個士兵，且放完後使得每行與每列都有奇數個士兵，則共有________種不同的放置情形。



答：16

解：$333\to1$種，$311\to9$種，$111\to6$種

15. 已知$B(x,y)$為坐標平面上異於$O(0,0)$，$A(4,2)$的點，且$\angle OBA=90°$，則滿足此條件之格子點($B(x,y)$坐標皆為整數的點)共有________個。

答：6

解：以$(0,0)$、$(4,2)$為直徑端點的圓

為$(x-0)(x-4)+(y-0)(y-2)=0$ $\Rightarrow x^2+y^2-4x-2y=0$

$\Rightarrow(x-2)^2+(y-1)^2=5$，其上格子點（$(0,0)$、$(4,2)$以外）為

$(x,y)=(3,3)$，$(3,-1)$，$(1,3)$，$(1,-1)$，$(4,0)$，$(0,2)$

16. 已知A、B兩點的極坐標為$A[4,\alpha]$、$B[2,\beta]$，其中$90°\le\alpha\le180°$、$-45°\le\beta\le0°$。若A、B兩點之斜率的最小值為a，最大值為b，則$a+b=$________。(化為最簡根式)

答：$-1-2\sqrt{2}$

解：$a=(\sqrt{2},-\sqrt{2})$與$(0,4)$所成斜率$\frac{4+\sqrt{2}}{0-\sqrt{2}}=-2\sqrt{2}-1$

$b=(2,0)$與$(-4,0)$所成斜率$=0$

17. 設 $f(x)$，$g(x)$ 皆為實係數多項式，其中 $y=f(x)$ 的首項係數為 1，$y=g(x)$ 的圖形為開口向上的拋物線，已知 $(g(x))^2$ 和 $g(x)$ 分別除以 $f(x)$ 的餘式皆為 $\frac{1}{2}x$，則不等式 $f(x)\le 0$ 的整數解有________個。

答：3

解：$g(x)=ax^2+bx+c$，$a>0$，$f(x)=x^2+px+q$

$$ax^2+bx+c=\left(x^2+px+q\right)\times a+\frac{1}{2}x$$

$$\left(ax^2+bx+c\right)^2=\left[\left(x^2+px+q\right)\times a+\frac{1}{2}x\right]^2=\left(x^2+px+q\right)Q(x)+\frac{1}{2}x$$

故 $\frac{1}{4}x^2=\left(x^2+px+q\right)\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x \Rightarrow p=-2$，$q=0$

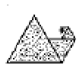
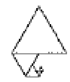
則 $f(x)=x^2-2x=x(x-2)\le 0 \Rightarrow 0\le x\le 2$

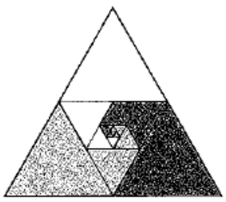
$x\in Z \Rightarrow x=0$，1，2

第貳部分：混合題或非選擇題

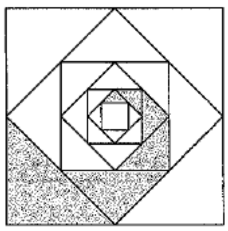
18-20 題為題組

根據自然期刊網站（https://doi.org/10.1038/s41427-020-0201-3）刊載文章指出，研究學者利用 STM 顯微鏡發現，在石墨分子上所形成的 chiral Kagomé $-\alpha$ 納米結構，是 Baravelle Spiral 三角三聚體。

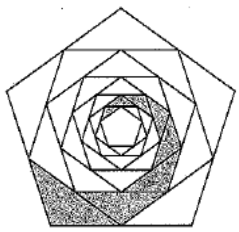
觀察下圖，他們是在不同的正多邊形中製造 Baravelle Spiral（螺線的一種）的方式。圖(一)～(四)分別是正三、四、五、六邊形，今在每個正多邊形中以其各邊的中點為頂點，再連成新的小正多邊形，依照此規律一直持續進行，黑灰色部分可視為 Baravelle Spiral 所分割出的圖形。例如圖(一)中 Baravelle Spiral 可分割出面積相等的三塊圖形：  



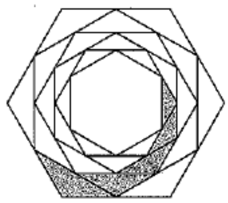
圖(一)



圖(二)



圖(三)



圖(四)

18. 圖(二)中共有 7 個由大至小的正方形，假設其中最大的正方形面積為 S，最小的正方形面積為 T，且圖(二)中灰色區域的面積為 $\frac{S-mT}{n}$，則數對 $(m,n)=$________。

答：$(1,4)$

解：灰色面積 $=\frac{S}{8}+\frac{S}{16}+\frac{S}{32}+\frac{S}{64}+\frac{S}{128}+\frac{S}{256}$

$$=\frac{\frac{S}{8}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{S}{4}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\right]=\frac{S-T}{4}$$

19. 觀察圖(三)的灰色區域，它是由8個由大至小的等腰三角形所組成，若他們的面積可形成一個等比數列，求此等比數列的公比。

$\boxed{\text{答}}$：$\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$

$\boxed{\text{解}}$：面積公比$=(\text{邊長公比})^2=(\cos 36^\circ)^2=\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$

20. 若圖(四)中最大的正六邊形面積為6，試求其灰色區域的5個等腰三角形的面積和。

$\boxed{\text{答}}$：$\dfrac{781}{1024}$

$\boxed{\text{解}}$：$\because \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=1 \Rightarrow a=\dfrac{2}{\sqrt[4]{3}}$

$$\therefore \frac{1}{2}\times\left(\frac{a}{2}\right)^2\times\sin 120^\circ=\frac{1}{8}\times\frac{4}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{8}$$

$$\text{則面積和}=\frac{\frac{1}{4}\left[1-(\cos 30^\circ)^{10}\right]}{1-(\cos 30^\circ)^2}=\frac{\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^5\right]}{\frac{1}{4}}=\frac{781}{1024}$$