全國公私立高級中學111學年度學科能力測驗第二次聯合模擬考試

數學考科解析

考試日期：111年9月6～7日

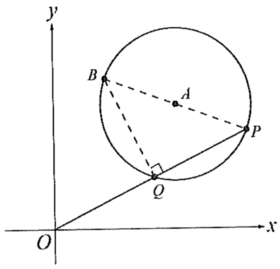
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11-1	11-2	12-1	12-2	12-3
1	2	5	3	3	23	45	124	2345	14	－	4	3	6	9
13-1	13-2	13-3	13-4	14-1	14-2	14-3	14-4	14-5	14-6	15-1	15-2	15-3	15-4	16-1
1	4	6	4	1	4	0	1	4	3	－	1	6	2	2
16-2	17-1	17-2	17-3	18	19	20								
6	2	1	3	4										

第壹部分、選擇題

一、單選題

1. $\sqrt{4-\sqrt{12}}\le x\le\sqrt{4+\sqrt{12}}\Rightarrow\sqrt{4-2\sqrt{3}}\le x\le\sqrt{4+2\sqrt{3}}$
$\Rightarrow\sqrt{3}-1\le x\le\sqrt{3}+1\Rightarrow -1\le x-\sqrt{3}\le 1\Rightarrow|x-\sqrt{3}|\le 1$，
所以$\begin{cases}a=1\\b=-\sqrt{3}\end{cases}$，$\dfrac{b}{a}=-\sqrt{3}$最接近$-2$，
故選(1)。

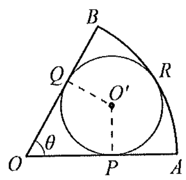
2. 因為$\overline{BP}$為圓Γ的直徑，
所以由中點公式，
可得P點坐標為$(8,4)$
$\Rightarrow\overline{OP}$斜率為$m=\dfrac{4-0}{8-0}=\dfrac{1}{2}$，
又$\overline{BQ}$與$\overline{PQ}$互相垂直，
所以$\overline{BQ}$的斜率為-2，
$\Rightarrow$直線BQ的方程式為$y=-2(x-2)+6$，
因此，Q點坐標為$(4,2)$，
故選(2)。



3. 因為$f(x)$的對稱中心為$(1,1)$，
所以設$f(x)=a(x-1)^3+b(x-1)+1$，
展開後，得$f(x)=ax^3-3ax^2+(3a+b)x+1-a-b$，
又$f(x)$在$x=0$附近的一次近似為$6x-3$，
所以$3a+b=6$，$1-a-b=-3$，解得$a=1$，$b=3$，
$f(-1)=-8-6+1=-13$，
故選(5)。

4. 設選取的三數為$a<b<c$
$\Rightarrow$三數的中位數為b，算術平均數為$\dfrac{a+b+c}{3}$
先考慮$b<\dfrac{a+b+c}{3}$的情況，即$a+c>2b$，
利用b值進行分類討論：
(Ⅰ) $b=2\Rightarrow a+c>4\Rightarrow a=1$，$c=4$或$5$；
(Ⅱ) $b=3\Rightarrow a+c>6\Rightarrow a=2$，$c=5$；
(Ⅲ) $b=4\Rightarrow a+c>8\Rightarrow$皆不合，
所以滿足$b<\dfrac{a+b+c}{3}$的共有3組，
得$b\ge\dfrac{a+b+c}{3}$的共有$C^5_3-3=7$組，
故選(3)。

5. 設扇形OAB的內切圓圓心為O'，
$\angle OPO'=\angle OQO'=90°$，
由四邊形內角和$=360°$得知，
$\angle PO'Q=180°-\angle POQ$
$=180°-\angle AOB$
$=180°-\theta$，



同一圓上對同弧的圓周角大小是圓心角大小的一半，
所以$\angle PRQ=\dfrac{1}{2}\angle PO'Q=90°-\dfrac{1}{2}\theta\Rightarrow 0°<\angle PRQ<90°$，
且當θ由小變到大，$\angle PRQ$由大變到小，
所以$\cos\angle PRQ$從0嚴格遞增到1，
故選(3)。

二、多選題

6. (1) × (2) ○：
由最適直線公式$y=r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)+\mu_y$，
得Y對X的最適直線為$y=0.7\times\dfrac{3}{7}(x-162)+53$，
即$y=0.3(x-162)+53$。
(3) ○：$x=172$代入，得$y=0.3(172-162)+53=56$。
(4) ×：Y與Z的相關係數等於Y與X的相關係數為0.7。
(5) ×：Y對Z的最適直線必通過$(\mu_z,\mu_y)=(0,53)$，
不會通過原點。
故選(2)(3)。

7. 因為$|x+3|\ge 2$的解為$x\ge -1$或$x\le -5$，
又此範圍內離$\dfrac{4}{3}$最近的整數依序為$1,2,0,3,-1,4$，
所以-1要滿足$|3x-4|<a$且4要不滿足$|3x-4|<a$，
所以$|3\cdot(-1)-4|<a\le|3\cdot 4-4|$，即$7<a\le 8$，
故選(4)(5)。

8. 將各區域所對應的函數值列表求出：

區域	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚
c_1	1	0	0	0	1	1	0
c_2	2	2	2	0	0	0	0
c_3	4	4	0	0	0	4	4
$c=c_1+c_2+c_3$	7	6	2	0	1	5	4
顏色	白	黑	黃	紅	橙	紫	藍

故選(1)(2)(4)。

9. (1) ×：因為$f(x)=a(x+1)^3+\boxed{2(x-1)+3}$
$=a(x+1)^3+\boxed{2(x+1)-1}$，
所以$y=f(x)$圖形的對稱中心為$(-1,-1)$。
(2) ○：因為$f(0)=a\times 1^3+2\times(-1)+3=3$，所以$a=2$。
(3) ○：$f(x)=a(x+1)^3+2(x-1)+3$
展開式中x項為$a(3x)+2x$，
所以x項係數為$3a+2=3\times 2+2=8$。
(4) ○：因為$f(x)=2x^3+6x^2+8x+3$，由綜合除法可知，

$$\begin{array}{llll|l}
2 & +6 & +8 & +3 & \alpha \\
 & 2\alpha & +(6\alpha+2\alpha^2) & +(8\alpha+6\alpha^2+2\alpha^3) & \\
\hline
2 & +(6+2\alpha) & +(8+6\alpha+2\alpha^2) & +f(\alpha) & \alpha \\
 & 2\alpha & +(6\alpha+4\alpha^2) & & \\
\hline
2 & +(6+4\alpha) & +(8+12\alpha+6\alpha^2) & &
\end{array}$$

$f(x)$在$x=\alpha$的一次近似斜率為$8+12\alpha+6\alpha^2$，
同理，
$f(x)$在$x=\beta$的一次近似斜率為$8+12\beta+6\beta^2$
$\Rightarrow 8+12\alpha+6\alpha^2=8+12\beta+6\beta^2$
$\Rightarrow 6(\alpha^2-\beta^2)+12(\alpha-\beta)=0$
$\Rightarrow 6(\alpha-\beta)[(\alpha+\beta)+2]=0$，
因為$\alpha\ne\beta$，所以$\alpha+\beta=-2$。
(5) ○：由(1)(4)知，
$(\alpha,f(\alpha))$和$(\beta,f(\beta))$對稱於對稱中心$(-1,-1)$，
所以$f(\alpha)+f(\beta)=-2$。
故選(2)(3)(4)(5)。

10. $ad-bc$ 是奇數時，ad 和 bc 必須一奇一偶，
兩個奇數的乘積是奇數，兩數中至少有一個偶數，
相乘乘積就是偶數，
所以，ad 和 bc 是奇數的情形各有 1011^2、
是偶數的情形各有 2022^2-1011^2，

ad 是奇數或 bc 是奇數
兩數的乘積是奇數
兩數的乘積是偶數

$ad-bc$ 是奇數的機率$=\dfrac{C_1^2\cdot 1011^2\cdot(2022^2-1011^2)}{2022^4}$

$=C_1^2(\frac{1}{2})^2[1-(\frac{1}{2})^2]=\frac{3}{8}$，

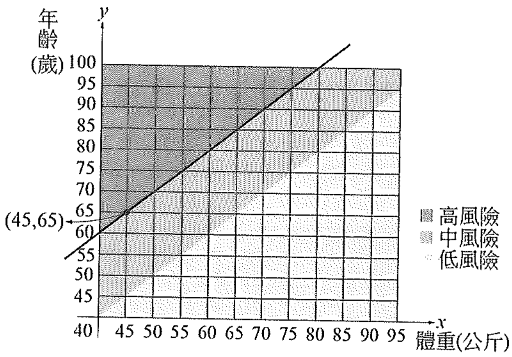
即 $p=\frac{3}{8}$，因為整數當中不是奇數就是偶數，所以 $p+q=1$，

則 $ad-bc$ 是偶數的機率 $q=\frac{5}{8}$，

故選(1)(4)。

三、選填題

11. 如下圖，高風險區域的邊界為一直線，
且通過點 $(45, 65)$，此時，$R=(45-65)\times 0.2=-4$，
又 $R=(x-y)\times 0.2$ 越往左邊移動，R 值會越小，
故 $k=-4$。



12. 因為兩顆骰子同點數的機率為 $\frac{1}{6}$，將遊戲獲得獎金的可能值與其發生的機率列表如下：

獎金	300	600	1200	1800
機率	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$	$\frac{5}{6}\times(\frac{1}{6})^2=\frac{5}{216}$	$(\frac{1}{6})^3=\frac{1}{216}$

根據期望值的定義，獲得獎金的期望值為

$300\times\frac{5}{6}+600\times\frac{5}{36}+1200\times\frac{5}{216}+1800\times\frac{1}{216}=\frac{3325}{9}\approx 369.4$

故此遊戲獎金的期望值約為 369 元。

13. 利用密碼所用各數字的數量進行討論：

(Ⅰ) 恰兩個數字出現 2 次：$C_2^4\times\dfrac{6!}{2!\times 2!}=1080$。

(Ⅱ) 恰一個數字出現 3 次：$C_1^4\times(\dfrac{6!}{3!}-4!)=384$。

故這樣的六位數密碼共有 1464 種。

14. 設箱內有 n 顆黃球，任取 2 球，2 球皆為黃球之機率

$\dfrac{1}{13}=\dfrac{C_2^n}{C_2^{13}}=\dfrac{n\times(n-1)}{13\times 12}\Rightarrow n=4$，

任取 4 球，至少取得一黑球之機率

$1-\underbrace{\dfrac{C_4^6}{C_4^{13}}}_{\text{都沒有黑球}}=1-\dfrac{6\times 5\times 4\times 3}{13\times 12\times 11\times 10}=1-\dfrac{3}{143}=\dfrac{140}{143}$。

15. 設多項式 $f(x)=g(x)+(-2x^4)$，
由題設得知 $g(x)=(x^3+2x^2+3x)Q(x)+(3x^2-2x+5)$
$=x(x^2+2x+3)Q(x)+(3x^2-2x+5)$，
且用長除法可得到

$\begin{cases}3x^2-2x+5=(x^2+2x+3)\times 3+(-8x-4)\\ -2x^4=(x^2+2x+3)(-2x^2+4x-2)+(-8x+6)\end{cases}$，

故 $f(x)=g(x)+(-2x^4)$
$=[(x^2+2x+3)(xQ(x)+3)+(-8x-4)]+[(x^2+2x+3)(-2x^2+4x-2)+(-8x+6)]$
$=(x^2+2x+3)[(xQ(x)+3)+(-2x^2+4x-2)]+[(-8x-4)+(-8x+6)]$，
所以 $f(x)$ 除以 x^2+2x+3 的餘式為
$(-8x-4)+(-8x+6)=-16x+2$。

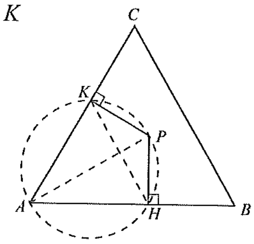
16. 因為△ABC 面積為△ACD 面積的 5 倍，
所以△ABD 面積為△ACD 面積的 4 倍

$\Rightarrow \frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin 45^\circ=4\times\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AD}\times\sin 60^\circ$，

化簡得 $\overline{AB}=2\sqrt{6}\,\overline{AC}$，

故 $k=2\sqrt{6}$。

17. 設 P 到 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 的垂足分別為 H 與 K
$\Rightarrow \angle AKP=\angle AHP=90^\circ$，
所以 $\angle KPH=180^\circ-60^\circ=120^\circ$，
A，H，P，K 四點落在同一圓 Γ 上，
且 $\overline{AP}$ 為圓的直徑，
在△PHK 中，由餘弦定理，知
$\overline{HK}=\sqrt{2^2+5^2-2\times 2\times 5\times\cos 120^\circ}$
$=\sqrt{39}$，



再由正弦定理知，$\overline{AP}=\dfrac{\overline{HK}}{\sin\angle KPH}=\dfrac{\sqrt{39}}{\sin 120^\circ}=2\sqrt{13}$。

第貳部分、混合題

18. (1) ×：由遞迴定義式，知
$a_{22}=a_{21}+k=a_{20}+3+k=a_{19}+k+3+k=\cdots$
$=a_1+(k+3+k+3+k+\cdots+k)$，
即 $42=1+(11k+30)$，解得 $k=1$。
(2) ×：$a_2=a_1+1=2$。
(3) ×：因為 $a_{22}=a_{21}+1$，所以 $a_{21}=a_{22}-1=41$。
(4) ○：因為 $a_{24}=a_{23}+1=a_{22}+4=46$。
(5) ×：$\langle a_n\rangle$ 前後項的差不為定值。
故選(4)。

19. 因為 $b_{n+1}=a_{2n+2}+a_{2n+1}$ (2 分)
$=(a_{2n+1}+1)+(a_{2n}+3)$
$=(a_{2n}+3)+(a_{2n-1}+1)+4$
$=a_{2n}+a_{2n-1}+8$
$=b_n+8$，(2 分)
所以 $\langle b_n\rangle$ 為等差數列，故得證。(2 分)

20. <法一>
因為 $b_1=a_1+a_2=1+2=3$，(2 分)
又 $\langle b_n\rangle$ 為等差數列，且公差為 8，(2 分)
所以 $S_{50}=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+\cdots+a_{49}+a_{50}$
$=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{25}$
$=\dfrac{25\cdot[2\times 3+24\times 8]}{2}$
$=2475$。(2 分)

<法二>
因為 $a_{2n+1}=a_{2n}+3=(a_{2n-1}+1)+3=a_{2n-1}+4$，
所以 $\langle a_{2n-1}\rangle$ 為一等差數列且公差為 4，
$a_{49}=1+24\times 4=97$。(2 分)
同理，$\langle a_{2n}\rangle$ 也是一等差數列且公差為 4，
$\Rightarrow a_{50}=2+24\times 4=98$，(2 分)
故 $S_{50}=(a_1+a_3+\cdots+a_{49})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{50})$
$=\dfrac{25(1+97)}{2}+\dfrac{25(2+98)}{2}$
$=2475$。(2 分)