

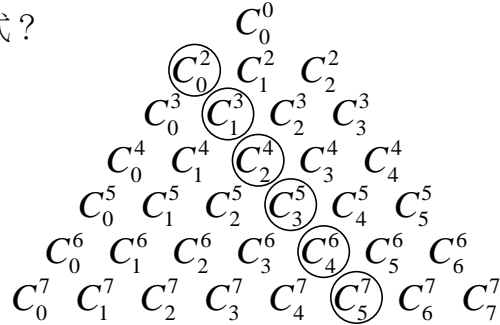
112 年學科能力測驗第三次模擬考試(112-W3)

第壹部分：選擇題(占 85 分)



一、單選題(占 30 分)

1. 設 x 為正整數，且 $A(x-1)$ 、 $B(x)$ 、 $P(\log 2023)$ 為數線上三點。若 P 點在 \overline{AB} 上，則 $x^{\frac{1}{2}}$ 之值為下列何者？ (1) -2 (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\sqrt{2}$ (5) 2
2. 巴斯卡三角形是二項式係數的一種寫法，形似三角形，這種三角形在中國最先出現在《永樂大典》卷一六三四四中的楊輝《詳解九章算法》。今將下圖中圈出的六個數形成一數列 $a_1 = C_0^2, a_2 = C_1^3, a_3 = C_2^4, a_4 = C_3^5, a_5 = C_4^6, a_6 = C_5^7$ 。試問此數列滿足下列哪個選項中的遞迴關係式？



- (1) $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + n - 1, n = 2, 3, 4, 5, 6 \end{cases}$
- (2) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 3a_{n-1}, n = 2, 3, 4, 5, 6 \end{cases}$
- (3) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + n - 1, n = 2, 3, 4, 5, 6 \end{cases}$
- (4) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + n, n = 2, 3, 4, 5, 6 \end{cases}$ (5) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + n + 1, n = 2, 3, 4, 5, 6 \end{cases}$
3. 數學老師在課堂上請同學使用一條長度為 18 公分的細繩來圍成一個三角形並計算其面積。已知彩英圍成一個邊長為 6 公分的正三角形，其面積為 a 平方公分；喜善圍成一個三邊長為 8 公分、7 公分、3 公分的鈍角三角形，其面積為 b 平方公分；力尹圍成一個三邊長為 7 公分、6 公分、5 公分的銳角三角形，其面積為 c 平方公分。關於 a 、 b 、 c 三個數值的大小，試選出正確的選項。(1) $a > c > b$ (2) $a > b > c$ (3) $c > a > b$ (4) $b > c > a$ (5) $b > a > c$
4. 清明節吃潤餅的習俗源自於古代的「寒食節」，在「禁火」的限制下，大家只能吃冷食，加上寒食節與清明節氣相近，因此不需用火烹飪的潤餅就成為清明節的節日食品。某間潤餅皮專賣店統計近五年在清明節當天，一斤潤餅皮的售價 x 元與銷售量 y 斤的資料如下表：

一斤潤餅皮的售價 x 元	120	90	150	210	180
銷售量 y 斤	1000	800	600	400	200

- 由銷售量 y 對售價 x 的迴歸直線，可發現一斤潤餅皮的售價每增加 1 元時，清明節當天銷售量的變化情形為下列何者？(1) 減少 6 斤 (2) 減少 $\frac{16}{3}$ 斤 (3) 減少 $\frac{3}{16}$ 斤 (4) 增加 $\frac{3}{16}$ 斤 (5) 增加 $\frac{16}{3}$ 斤
5. 在坐標平面上，設 O 為原點，且 A 、 B 、 C 、 D 為圓 $\Gamma: x^2 + y^2 = 4$ 上相異四點。若 $\angle AOB = 60^\circ, \angle AOC = 120^\circ, \angle AOD = 150^\circ$ ，則 $\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{AD}$ 等於下列何者？(參考數值： $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$) (1) $(\sqrt{6} - \sqrt{2}) : 2 : 2\sqrt{3}$ (2) $1 : (\sqrt{6} - \sqrt{2}) : \sqrt{3}$ (3) $1 : \sqrt{2} : (\sqrt{6} + \sqrt{2})$ (4) $1 : \sqrt{3} : (\sqrt{6} + \sqrt{2})$ (5) $2 : 2\sqrt{3} : (\sqrt{6} + \sqrt{2})$

6. 已知實係數多項式 $f(x) = ax^{200} + bx^{199} + x^{100}$ 除以 $x-1$ ，餘式為 -1 ；除以 $x+1$ ，餘式為 7 。試問 $f(2)$ 之值最接近下列何者？ (1) 10^{20} (2) 10^{30} (3) 10^{40} (4) 10^{50} (5) 10^{60}

二、多選題(占 30 分)

7. 某校規定學生緊急送醫時，除非家長特別指定醫院外，否則均以最近醫院為後送醫院，送醫之交通工具則以聯絡 119 救護車前來支援為主。今該校學生南俊在上體育課時，不小心被籃球打到頭部，經校護評估必須緊急送醫。已知在坐標地圖上，學校附近只有甲、乙兩間醫院，且分別位於 $P(4,1)$ 、 $Q(-2,5)$ 兩點，因為南俊的家長並未特別指定醫院，所以救護車則以最近醫院為後送醫院。若南俊被送至甲醫院診治，則該校的位置坐標可能為下列哪些選項？ (1) $(-3,-2)$ (2) $(-2,-2)$ (3) $(0,1)$ (4) $(1,4)$ (5) $(2,5)$
8. 已知三次多項式 $f(x)$ 除以 $x+2$ 的商式為 $3(x+2)^2 - 1$ ，餘式為 -2 。試選出正確的選項。
(1) $x+1$ 是 $f(x)$ 的因式 (2) $f(x)$ 除以 $(x+2)^3$ 的餘式為 -2 (3) $y = f(x)$ 的圖形通過點 $(-1,0)$ (4) $y = f(x)$ 圖形的對稱中心為 $(2,-2)$ (5) $y = 3x^3 - x$ 的圖形可由 $y = f(x)$ 圖形經適當平移得到
9. 設 $\{a_n\}$ 為一實數等比數列，已知 $a_1 = 2$ 且公比為 r 。若 $-2 \leq r \leq -1$ ，則 $a_1 + a_2 + a_3$ 之值可能為下列哪些選項？ (1) -2 (2) 1 (3) 3 (4) 5 (5) 7
10. 已知三正數 a 、 b 、 c 成等差數列，試選出正確的選項。
(1) $10^{\log a}$ 、 $10^{\log b}$ 、 $10^{\log c}$ 成等差數列 (2) $a+1$ 、 $b+2$ 、 $c+3$ 成等差數列
(3) 2^a 、 2^b 、 2^c 成等比數列 (4) 若 a 、 b 、 c 均為正整數，則 a 與 c 兩數可能分別為一個奇數與一個偶數 (5) 若 $b = 4$ ，則 ac 之值可能為 20
11. 就讀高一的紫瑜，在第一次段考前共考了 6 次數學平時考，且每次考試的給分範圍為最低 0 分、最高 100 分。已知紫瑜這 6 次平時考的成績分數均不同，且將 6 次分數由低至高排序，較低分的 3 次成績平均為 30 分、中位數為 20 分、全距為 d_1 分；較高分的 3 次成績平均與中位數均為 80 分、全距為 d_2 分。下列有關紫瑜這 6 次平時考成績的敘述，試選出正確的選項。
(1) 6 次平時考成績的平均為 55 分 (2) 6 次平時考成績的中位數為 50 分 (3) 6 次平時考成績的全距為 $(d_1 + d_2)$ 分 (4) 在 6 次平時考成績中，至少有 3 次及格(分數達 60 分) (5) 在 6 次平時考成績中，最多有 3 次未達補考門檻 40 分
12. 每逢中秋佳節，許多人都會購買蛋黃酥送禮或是自行享用，名店更常見銷售一空的盛況。某糕餅名店的門口湧現排隊人潮，所有人排成一直線，每個人與前一個人的距離均為 0.5 公尺。已知美惠與寶英分別排在第 1 個和第 41 個，而智苑也在隊伍中。若智苑與美惠的距離比智苑與寶英距離的 2 倍還遠，則智苑可能排在隊伍中的第幾個？
(1) 27 個 (2) 28 個 (3) 30 個 (4) 73 個 (5) 81 個

三、選填題(占 25 分)

13. 在坐標平面上，已知以點 $M(a,b)$ 為圓心的圓 Γ 通過原點 O ，且分別與 x 軸、 y 軸交於 $A(c,0)$ 、 $B(0,d)$ 兩點，其中 $cd \neq 0$ 。若 $a+b = \frac{13}{2}$ ，則 $c+d = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
14. 因應國內近期蛋荒，農委會陸續引進多國雞蛋，在量販通路販售，超商也能買到進口蛋。亞嫻住家附近有 A 、 B 、 C 三間不位於同一直線上的超商，其中 A 、 B 兩間超商的距離為 2 公里， A 、 C 兩間超商的距離為 4 公里。亞嫻跑了 A 、 B 兩間超商均未買到進口蛋，最後在從 B 超商前往 C 超商的旅途中，發現一間新開幕的 D 超商內尚有進口蛋可購買。已知 D 超商位於 B 、 C 兩超商之間，且與 B 、 C 兩間超商的距離分別為 2 公里與 1 公里，則 D 超商與 A 超商的距離為 公里。
15. 某五金百貨為了慶祝父親節，推出凡消費即可參加拿購物金的活動。活動內容為每位消費者可投擲兩顆公正的骰子一次，所出現的兩個點數若能拼出一個被 8 整除的二位數，

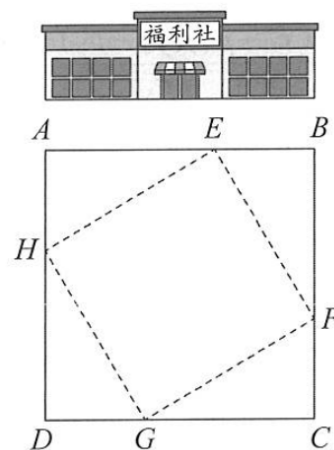
即可獲得此二位數金額的購物金，其餘情形則無法獲得任何購物金。例如：出現的點數為 2 點與 3 點時，可拼出被 8 整除的二位數 32，即獲得購物金 32 元。試求參加拿購物金的活動一次可獲得購物金的期望值為_____元。(化為最簡分數)

16. 已知 A 箱中裝有 3 張 100 元的紙鈔和 2 張 1000 元的紙鈔，而 B 箱中裝有 3 張 100 元的紙鈔和 4 張 500 元的紙鈔。若隨機自 A 與 B 箱中各取出 2 張紙鈔，則 A 箱中剩下的紙鈔總金額大於 B 箱中剩下的紙鈔總金額的機率為_____。(化為最簡分數)
17. 已知 A、B 兩點的極坐標分別為 $A[2\sqrt{2}, 45^\circ]$ 、 $B[r, \theta]$ ，其中 $r > 0, 0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ 。若 $\overline{AB} = \frac{2}{5}$ ，則 $\tan \theta$ 的最大值為_____。(化為最簡分數)

第貳部分：混合題或非選擇題(占 15 分)

18-20 題為題組

學校每年都會舉辦校園 K 歌比賽，今年規劃比賽地點在學校福利社前的一塊邊長為 16 公尺的正方形空地(即正方形 ABCD)，而表演舞臺為正方形 EFGH，其中 E、F、G、H 分別位於 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AD} 上，示意圖如右所示：



在表演舞臺旁邊的 $\triangle AEH$ 區域為參賽同學準備區，其餘區域(即 $\triangle BEF$ 、 $\triangle CFG$ 、 $\triangle DGH$)則為粉絲加油區，因考量場地各區域的配置，所以規劃舞臺面積不超過 136 平方公尺。已知今年共有 6 位同學參加比賽，下表為參賽同學所選的歌曲。

參賽同學	比賽歌曲
杰恩	告白氣球
秀宏	離別總是那麼突然
玉珍	世界都看見
昀慈	以後別做朋友
依珊	告白氣球
永裕	如果沒有你

比賽規則為依照活動組安排的比賽順序，每次由一位參賽同學上臺表演，最後再由全體師生票選出前三名。試回答下列問題。

18. 因為活動組發現今年有兩位參賽同學所選的歌曲相同，所以不會將此兩位同學排在相連的兩個順序(例如：杰恩為順序 3 時，依珊的順序不能為 2 和 4)。試問活動組共有幾種不同的安排順序?(單選題，3 分)
- (1)120 種 (2)240 種 (3)288 種 (4)360 種 (5)480 種
19. 設 $\overline{AH} = x$ (公尺)，試求 x 的範圍。(非選擇題，6 分)
20. 試求參賽同學準備區的最小面積。(非選擇題，6 分)

RA294 112 年學科能力測驗第三次模擬考試(112-W3)

參考答案

選擇題：1. (3) 2. (4) 3. (1) 4. (2) 5. (5) 6. (2) 7. (2)(3) 8. (1)(3)(5) 9. (3)(4)

10. (1)(2)(3) 11. (1)(4) 12. (2)(3)(4)

選填題：13. 13 14. $\sqrt{10}$ 15. $\frac{32}{3}$ 16. $\frac{9}{35}$ 17. $\frac{4}{3}$

混合題：18. (5) 19. $6 \leq x \leq 10$ 20. 30(平方公尺)