112 年學科能力測驗第三次模擬考試

數學考科解析

112-W3

第壹部分、選擇（填）題

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13-1	13-2	14-1
(3)	(4)	(1)	(2)	(5)	(2)	(2)(3)	(1)(3)(5)	(3)(4)	(1)(2)(3)	(1)(4)	(2)(3)(4)	1	3	1
14-2	15-1	15-2	15-3	16-1	16-2	16-3	17-1	17-2						
0	3	2	3	9	3	5	4	3						

第貳部分、混合題或非選擇題

18. (5)　19. $6\le x\le 10$　20. 30（平方公尺）

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (3)　【難易度】★☆☆

【出處】第一冊 指數、對數

【解析】$10^{\log 2023}=2023=2.023\times 10^3 \Rightarrow 10^3<2.023\times 10^3<10^4$

$\Rightarrow 10^3<10^{\log 2023}<10^4 \Rightarrow 3<\log 2023<4$

所以可知 $x=4 \Rightarrow x^{-\frac{1}{2}}=4^{-\frac{1}{2}}=(2^2)^{-\frac{1}{2}}=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$

故選(3)

2. (4)　【難易度】★☆☆

【出處】第二冊 數列與級數；排列組合與機率

【解析】可知 $a_1=C^2_0=1$，$a_2=C^3_1=3$，$a_3=C^4_2=6$，$a_4=C^5_3=10$

$a_5=C^6_4=15$，$a_6=C^7_5=21$

$\Rightarrow a_2=a_1+2$，$a_3=a_2+3$，$a_4=a_3+4$，$a_5=a_4+5$，$a_6=a_5+6$

故選(4)

3. (1)　【難易度】★☆☆

【出處】第二冊 三角比

【解析】①$a=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2=9\sqrt{3}=\sqrt{243}$

②$s=\dfrac{18}{2}=9$

由海龍公式可得 $b=\sqrt{9\times(9-8)\times(9-7)\times(9-3)}=\sqrt{108}$

③同理可得 $c=\sqrt{9\times(9-7)\times(9-6)\times(9-5)}=\sqrt{216}$

因為 $\sqrt{243}>\sqrt{216}>\sqrt{108}$，所以 $a>c>b$

故選(1)

4. (2)　【難易度】★★☆

【出處】第一冊 直線與圓；第二冊 數據分析

【解析】可知 $\mu_x=\dfrac{120+90+150+210+180}{5}=150$

$\mu_y=\dfrac{1000+800+600+400+200}{5}=600$

$\Rightarrow S_{xx}=(120-150)^2+(90-150)^2+(150-150)^2+(210-150)^2+(180-150)^2$

$=900+3600+0+3600+900=9000$

$S_{xy}=(120-150)(1000-600)+(90-150)(800-600)+(150-150)(600-600)+(210-150)(400-600)+(180-150)(200-600)$

$=-12000-12000+0-12000-12000=-48000$

所以 y 對 x 迴歸直線的斜率為 $m=\dfrac{S_{xy}}{S_{xx}}=\dfrac{-48000}{9000}=\dfrac{-16}{3}$

即售價每增加 1 元時，銷售量會減少 $\dfrac{16}{3}$ 斤

故選(2)

5. (5)　【難易度】★★☆

【出處】第一冊 直線與圓；第二冊 三角比

【解析】設 P 為圓 Γ 上異於 A、B、C、D 之一點

可知圓 Γ 的圓心為 O，半徑 $R=2$，$\angle AOB=60^\circ$

①若 P 在優弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上，則 $\angle APB=30^\circ$

在 $\triangle APB$ 中，由正弦定理可得 $\dfrac{\overline{AB}}{\sin\angle APB}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin 30^\circ}=2R$

$\Rightarrow \overline{AB}=2$

②若 P 在劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上，則 $\angle APB=150^\circ$

在 $\triangle APB$ 中，由正弦定理可得 $\dfrac{\overline{AB}}{\sin\angle APB}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin 150^\circ}=2R$

$\Rightarrow \overline{AB}=2$

同理 $\overline{AC}=2R\sin\angle APC=4\sin 60^\circ=2\sqrt{3}$

$\overline{AD}=2R\sin\angle APD=4\sin 75^\circ=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

因此 $\overline{AB}:\overline{AC}:\overline{AD}=2:2\sqrt{3}:(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

故選(5)

6. (2)　【難易度】★★☆

【出處】第一冊 指數、對數；多項式函數

【解析】由餘式定理可知 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 $f(1)$；除以 $x+1$ 的餘式為 $f(-1)$

所以可得 $\begin{cases} f(1)=a+b+1=-1 \\ f(-1)=a-b+1=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=-2 \\ a-b=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-4 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x)=2x^{200}-4x^{199}+x^{100}$

$\Rightarrow f(2)=2\times 2^{200}-4\times 2^{199}+2^{100}=2^{201}-2^{201}+2^{100}=2^{100}$

$\approx (10^{0.301})^{100}=10^{30.1}\approx 10^{30}$

故選(2)

二、多選題

7. (2)(3)　【難易度】★☆☆

【出處】第一冊 直線與圓

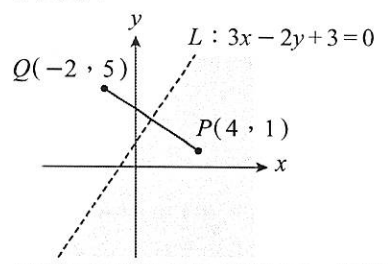
【解析】可知 $\overline{PQ}$ 中點為 $M(\dfrac{4+(-2)}{2},\dfrac{1+5}{2})$

$\Rightarrow M(1,3)$，且 $m_{\overline{PQ}}=\dfrac{1-5}{4-(-2)}=\dfrac{-2}{3}$

所以 $\overline{PQ}$ 的中垂線為 $L:y-3=\dfrac{3}{2}(x-1)\Rightarrow 3x-2y+3=0$

因為南俊被送至甲醫院，所以該校較靠近點 $P(4,1)$

作圖如下：



可知該校位於 L 的右半平面，即滿足 $3x-2y+3>0$

(1)✕　$3\times(-3)-2\times(-2)+3=-2<0$（不合）

(2)○　$3\times(-2)-2\times(-2)+3=1>0$

(3)○　$3\times 0-2\times 1+3=1>0$

(4)✕　$3\times 1-2\times 4+3=-2<0$（不合）

(5)✕　$3\times 2-2\times 5+3=-1<0$（不合）

故選(2)(3)

8. (1)(3)(5)　【難易度】★★☆

【出處】第一冊 多項式函數

【解析】由除法原理可知 $f(x)=(x+2)(3(x+2)^2-1)-2$

$=3(x+2)^3-(x+2)-2$

(1)○　因為 $f(-1)=3\times 1^3-1-2=0$，所以 $x+1$ 是 $f(x)$ 的因式

(2)✕　因為 $f(x)=3(x+2)^3-(x+2)-2$

所以 $f(x)$ 除以 $(x+2)^3$ 的餘式 $=-(x+2)-2=-x-4$

(3)○　承(1)可知 $f(-1)=0$，即 $y=f(x)$ 的圖形通過點 $(-1,0)$

(4)✕　$y=f(x)$ 圖形的對稱中心為 $(-2,-2)$

(5)○　將 $y=f(x)$ 的圖形向右平移 2 單位，向上平移 2 單位

可得 $y=3x^3-x$ 的圖形

故選(1)(3)(5)

9. (3)(4)　【難易度】★★☆

【出處】第一冊 多項式函數；第二冊 數列與級數

【解析】可知 $a_1+a_2+a_3=2+2r+2r^2=2(r+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{2}$

因為 $-2\le r\le -1$，所以 $r=-2$ 時，有最大值 $2\times(\dfrac{-3}{2})^2+\dfrac{3}{2}=6$

$r=-1$ 時，有最小值 $2\times(\dfrac{-1}{2})^2+\dfrac{3}{2}=2$

即 $2\le a_1+a_2+a_3\le 6$

故選(3)(4)

10. (1)(2)(3) 【難易度】★★☆

【出處】第一冊 指數、對數；第二冊 數列與級數

【解析】(1)○ 因為 $a=10^{\log a}$，$b=10^{\log b}$，$c=10^{\log c}$，且 a、b、c 成等差數列

所以 $10^{\log a}$、$10^{\log b}$、$10^{\log c}$ 成等差數列

(2)○ 因為 a、b、c 成等差數列，所以 $a+c=2b$

$\Rightarrow (a+1)+(c+3)=(a+c)+4=2b+4=2(b+2)$

即 $a+1$、$b+2$、$c+3$ 成等差數列

(3)○ 承(2)可知 $2^a\times 2^c=2^{a+c}=2^{2b}=(2^b)^2$

所以 2^a、2^b、2^c 成等比數列

(4)✕ 承(2)可知 $a+c=2b$，若 a、b、c 均為正整數

則 $a+c$ 為偶數，因此 a 與 c 兩數不可能為 1 奇 1 偶

(5)✕ 承(2)，若 $b=4$，則由算幾不等式可得 $4=b=\dfrac{a+c}{2}\geq\sqrt{ac}$

$\Rightarrow ac\leq 16$，即 ac 之值不可能為 20

故選(1)(2)(3)

11. (1)(4) 【難易度】★★☆

【出處】第二冊 數據分析

【解析】設 6 次平時考的分數由低至高依序為 a，20，b，c，80，d

(1)○ 6 次平時考成績的平均 $=\dfrac{3\times 30+3\times 80}{6}=\dfrac{330}{6}=55$（分）

(2)✕ 反例：6 次平時考成績為 10，20，60，70，80，90

其中位數 $=\dfrac{60+70}{2}=65$（分）

(3)✕ 承(2)的反例可知 $d_1=60-10=50$，$d_2=90-70=20$

但 6 次平時考成績的全距 $=90-10=80\neq d_1+d_2$

(4)○ 因為較高分的 3 次成績平均為 80，所以 $\dfrac{c+80+d}{3}=80$

$\Rightarrow c+d=160$

又 $c<80<d\leq 100$，因此可知 $d=160-c\leq 100$

$\Rightarrow 60\leq c$

即至少有 3 次及格

(5)✕ 因為較低分的 3 次成績平均為 30，所以 $\dfrac{a+20+b}{3}=30$

$\Rightarrow a+b=70$

又 $a<20<b$，因此可知 $a=70-b<20 \Rightarrow 50<b$，即恰有 2 次未達補考門檻 40 分

故選(1)(4)

12. (2)(3)(4) 【難易度】★★☆

【出處】第一冊 數與式

【解析】設智苑排在隊伍中的第 n 個，且美惠、寶英、智苑分別位於數線上 $A(0)$、$B(20)$、$C(x)$，其中 $x>0$，$x\neq 20$

可知 $\overline{AC}>2\overline{BC}\Rightarrow |x|>2|x-20|$，討論如下：

①當 $0<x<20$ 時，可得 $x>2(20-x)\Rightarrow x>\dfrac{40}{3}\Rightarrow \dfrac{40}{3}<x<20$

②當 $x>20$ 時，可得 $x>2(x-20)\Rightarrow x<40\Rightarrow 20<x<40$

所以 $\dfrac{40}{3}<x<20$ 或 $20<x<40$，又 $x=0.5\times(n-1)=\dfrac{n-1}{2}$

因此可得 $\dfrac{40}{3}<\dfrac{n-1}{2}<20$ 或 $20<\dfrac{n-1}{2}<40$

$\Rightarrow \dfrac{83}{3}<n<41$ 或 $41<n<81$

故選(2)(3)(4)

三、選填題

13. 13 【難易度】★☆☆

【出處】第一冊 直線與圓

【解析】因為 $\angle AOB=90°$，所以 A、B 為圓 Γ 的直徑兩端點

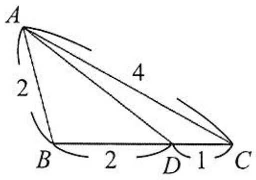
即圓心 $M(a，b)$ 為 $\overline{AB}$ 中點，由中點公式可得 $\begin{cases} a=\dfrac{c+0}{2}=\dfrac{c}{2} \\ b=\dfrac{0+d}{2}=\dfrac{d}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow a+b=\dfrac{c}{2}+\dfrac{d}{2}=\dfrac{13}{2}\Rightarrow c+d=13$

14. $\sqrt{10}$ 【難易度】★★☆

【出處】第二冊 三角比

【解析】作圖如下：



由餘弦定理可知 $\cos B=\dfrac{2^2+3^2-4^2}{2\times 2\times 3}=\dfrac{-1}{4}$

$\Rightarrow \overline{AD}=\sqrt{2^2+2^2-2\times 2\times 2\times(\dfrac{-1}{4})}=\sqrt{10}$

故 D 超商與 A 超商的距離為 $\sqrt{10}$ 公里

15. $\dfrac{32}{3}$ 【難易度】★★☆

【出處】第二冊 排列組合與機率

【解析】可拼出被 8 整除的二位數為 16、24、32、56、64

所以可獲得購物金的期望值 $E=16\times\dfrac{2}{6^2}+24\times\dfrac{2}{6^2}+32\times\dfrac{2}{6^2}+56\times\dfrac{2}{6^2}+64\times\dfrac{2}{6^2}$

$=(16+24+32+56+64)\times\dfrac{1}{18}$

$=\dfrac{32}{3}$（元）

16. $\dfrac{9}{35}$ 【難易度】★★★

【出處】第二冊 排列組合與機率

【解析】可知 A 箱與 B 箱中的總金額均為 2300 元，若各取出 2 張紙鈔後，A 箱中剩下的總金額較大，則自 A 箱中取出的 2 張紙鈔必須為 2 張 100 元，且自 B 箱中取出的 2 張紙鈔不能為 2 張 100 元，故其機率為 $\dfrac{C^3_2(C^7_2-C^3_2)}{C^5_2C^7_2}=\dfrac{3\times 18}{10\times 21}=\dfrac{9}{35}$

17. $\dfrac{4}{3}$ 【難易度】★★★

【出處】第一冊 直線與圓；第二冊 三角比

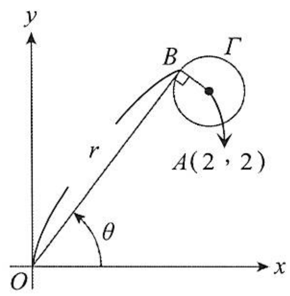
【解析】設 O 為極點，$\overleftrightarrow{OB}$：$y=mx$，其中 $m=\tan\theta$

可知 A 點的直角坐標為 $(2\sqrt{2}\cos 45°，2\sqrt{2}\sin 45°)$

即 $A(2，2)$

因為 $\overline{AB}=\dfrac{2}{5}$，所以 B 為圓 Γ：$(x-2)^2+(y-2)^2=\dfrac{4}{25}$ 上一點

可知當 $\overleftrightarrow{OB}$ 與圓 Γ 相切時，$\tan\theta$ 有最大值，作圖如下：



可得 $d(A，\overleftrightarrow{OB})=\dfrac{|2m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{5}\Rightarrow 5|m-1|=\sqrt{m^2+1}$

$\Rightarrow 25m^2-50m+25=m^2+1\Rightarrow 12m^2-25m+12=0$

$\Rightarrow (3m-4)(4m-3)=0\Rightarrow m=\dfrac{4}{3}$ 或 $\dfrac{3}{4}$（不合）

又 $m=\tan\theta$，故 $\tan\theta$ 的最大值為 $\dfrac{4}{3}$

第貳部分、混合題或非選擇題

18-20 題為題組

18. (5) 【難易度】★☆☆

【出處】第二冊 排列組合與機率

【解析】先排秀宏、玉珍、昀慈、永裕，再插入杰恩與依珊，所以其方法數為 $4!\times 5\times 4=480$，故選(5)

19. $6\leq x\leq 10$ 【難易度】★☆☆

【出處】第一冊 多項式函數

【解析】可知 $\overline{BE}=\overline{AH}=x$ 且 $\overline{AB}=16$，所以 $\overline{AE}=16-x$

$\Rightarrow$ 正方形 $EFGH$ 面積 $=\overline{EH}^2=\overline{AH}^2+\overline{AE}^2=x^2+(16-x)^2$

$=2x^2-32x+256\leq 136$

$\Rightarrow x^2-16x+60\leq 0\Rightarrow (x-6)(x-10)\leq 0\Rightarrow 6\leq x\leq 10$

20. 30（平方公尺） 【難易度】★☆☆

【出處】第一冊 多項式函數

【解析】承第 19 題可知 $\triangle AEH$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{AE}=\dfrac{1}{2}\times x\times(16-x)$

$=-\dfrac{1}{2}x^2+8x=-\dfrac{1}{2}(x-8)^2+32$

其中 $6\leq x\leq 10$

所以當 $x=6$ 或 10 時，$\triangle AEH$ 有最小面積 $-\dfrac{1}{2}\times 4+32=30$（平方公尺）