全國公私立高級中學 112 學年度學科能力測驗第二次聯合模擬考試

數學考科解析

考試日期：111 年 9 月 6~7 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13-1	13-2	13-3
4	5	2	4	2	1	14	4	34	235	25	25	1	4	3
13-4	14-1	14-2	14-3	15-1	16-1	16-2	17-1	17-2	18	19	20			
0	4	7	3	3	1	3	3	6	3					

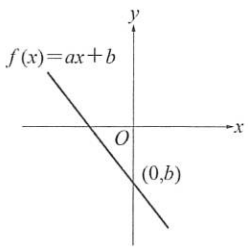
第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. 由除法原理可知，$f(x)=(x+2)(x^7+2x+3)+3$，
因為 $x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$，
而且 x^7+2x+3 除以 $x+1$ 之餘式為
$(-1)^7+2\times(-1)+3=0$，
所以 $f(x)=(x+2)[(x+1)Q(x)+0]+3$
$=(x+2)(x+1)Q(x)+3$
$=(x^2+3x+2)Q(x)+3$，
故選(4)。

2. 由題意可知 A 點的坐標為 $(t,2t^2)$、
D 點的坐標為 $(t,-\frac{1}{2}t^2)$，
則 $\overline{AB}=|2t|=-2t$，$\overline{AD}=2t^2-(-\frac{1}{2}t^2)=\frac{5}{2}t^2$，
由 $\overline{AB}=\overline{AD}\Rightarrow -2t=\frac{5}{2}t^2\Rightarrow 5t^2+4t=0$
$\Rightarrow t=-\frac{4}{5}$ 或 0（不合），所以 $t=-\frac{4}{5}$，
故選(5)。

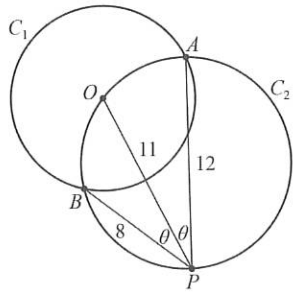
3. 因為 $f(x)=ax+b$ 過 $(0,b)$，
且直線 $y=ax+b$ 的斜率為 a，
由圖可知 $b<0$ 且 $a<0$。
因為 $a<0\Rightarrow -3a>0$，
且 $h(x)=-3a(x+b)^3$ 的
對稱中心為 $(-b,0)$，
而 $-b>0$，
故可能的圖形為(2)。



4. 因為平移不會改變標準差，所以 $\sigma_1=\sigma_4=\sigma_5>0$，
而(Ⅲ)之數據為(Ⅰ)之數據的 2 倍再減 3，所以 $\sigma_3=2\sigma_1$，
又 $\sigma_2=0$，由以上可知，$\sigma_3>\sigma_1=\sigma_4=\sigma_5>\sigma_2$，
故選(4)。

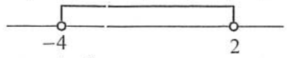
5. $L：y-23=\frac{23-7}{0-1}(x-0)$，即 $L：y=-16x+23$，
令 $g(x)=-16x+23$，
因 $f(0)=g(0)$，$f(1)=g(1)$，$f(5)=g(5)$，
可知 $f(x)-g(x)$ 有因式 $x(x-1)(x-5)$，
又 $f(x)-g(x)$ 為三次多項式，
設 $f(x)-g(x)=ax(x-1)(x-5)$，其中 $a\neq 0$，
則 $f(x)=a(x^3-6x^2+5x)-16x+23$，
故可得 $h=\frac{-(-6a)}{3a}=2$，
故選(2)。

6. 設圓 C_1 的半徑是 r，
因為 $\overline{OA}=\overline{OB}=r$，
所以 $\angle APO=\angle BPO=\theta$，
利用餘弦定理，
$r^2=12^2+11^2-2\cdot 12\cdot 11\cdot\cos\theta$
$=11^2+8^2-2\cdot 11\cdot 8\cdot\cos\theta$，
所以 $\cos\theta=\frac{10}{11}$，所以 $r=5$。
故選(1)。



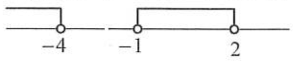
二、多選題

7. 因 $A=\{x\mid |x+1|<3\}=\{x\mid -4<x<2\}$。



$B=\{x\mid x^2+2x-8\geq 0\}=\{x\mid x\geq 2$ 或 $x\leq -4\}$。

$C=\{x\mid(2-x)(x^2+5x+4)>0\}$
$=\{x\mid(x-2)(x+1)(x+4)<0\}$
$=\{x\mid x<-4$ 或 $-1<x<2\}$。

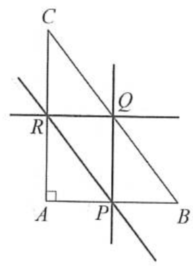


故選(1)(4)。

8. 因 $|ax-1|<5\Rightarrow -4<ax<6$，
(Ⅰ) $a>0$ 時，$\frac{-4}{a}<x<\frac{6}{a}$，
和 $-2<x<b$ 比對得 $a=2$，$b=3$，
此時，$a+b=5$，$a-b=-1$，$|a|\leq|b|$。
(Ⅱ) $a<0$ 時，$\frac{6}{a}<x<\frac{-4}{a}$，
和 $-2<x<b$ 比對得 $a=-3$，$b=\frac{4}{3}$，
此時，$a+b=\frac{-5}{3}$，$a-b=\frac{-13}{3}$，$|a|\geq|b|$。
故選(4)。

9. 令 $x^{\frac{1}{5}}=(\frac{y}{2})^{\frac{1}{6}}=(\frac{z}{4})^{\frac{1}{7}}=k$，則 $x=k^5$，$y=2k^6$，$z=4k^7$，
當 $k=2$ 時，$x<y<z$，當 $k=0.1$ 時，$x>y>z$，
當 $k=\frac{1}{2}$ 時，$x=y=z=\frac{1}{32}$，此時 x,y,z 形成等差數列，
又 $\frac{y}{x}=2k$，且 $\frac{z}{y}=2k$，可知 x,y,z 一定是等比數列，
故選(3)(4)。

10. 令 $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CA}$ 之中點分別為 P,Q,R，
則 $P(2,-5)$，$Q(2,-1)$，$R(-1,-1)$，
如右圖所示，
$\overleftrightarrow{PQ}：x=2$，
$\overleftrightarrow{RQ}：y=-1$，
$\overleftrightarrow{PR}：y-(-5)=\frac{-1-(-5)}{-1-2}(x-2)$
$\Rightarrow 4x+3y+7=0$，
故選(2)(3)(5)。



11. 由長除法，
$x^4+ax^3-3x^2+bx+3=(x+1)^2(x^2+(a-2)x-2a)+r(x)$
$\Rightarrow f(x)-r(x)=(x+1)^2(x-2)(x+a)$，
因 $f(p)=r(p)\Rightarrow(p+1)^2(p-2)(p+a)=0$，
故 $p=-1$ 或 2 或 $-a$，
又 $a>5$，故 $-a<-5$，
故選(2)(5)。

12. (1) ×：只能由父輩的身高來預估子輩的身高。

(2) ○：因為 $m=r\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$，且 $\sigma_x>0$，$\sigma_y>0$，

所以 r 和 m 同號。

(3) ×：0.516 為斜率，非相關係數。

(4) ×：因為相關係數未知，所以無法得知子輩身高的標準差與父輩身高的標準差之大小關係。

(5) ○：若改變單位後，父輩的身高為 x'，子輩的身高為 y'，相關係數為 r'，則 $x'=2.54x$，$y'=2.54y$，

$r_{(x',y')}=r_{(2.54x,\,2.54y)}=r$。

故選(2)(5)。

三、選填題

13. $2\times1+4\times3+6\times5+\cdots+20\times19$

$=2\times(2-1)+4\times(4-1)+\cdots+20\times(20-1)$

$=(2^2+4^2+\cdots+20^2)-(2+4+\cdots+20)$

$=4\times(1^2+2^2+\cdots+10^2)-2(1+2+\cdots+10)$

$=4\times\dfrac{10\times11\times21}{6}-2\times\dfrac{10\times11}{2}=1540-110$

$=1430$。

14. 延長 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 交於 E，$\triangle BCE$ 為正三角形，邊長為 8，四邊形 $ABCD$ 的面積

$=\triangle EAD-\triangle EBC=\dfrac{1}{2}\times14\times18\times\sin60^\circ-\dfrac{\sqrt3}{4}\times8^2$

$=47\sqrt3$。

15. 如圖，塔高 $\overline{OP}=h$，航行距離 $\overline{AB}=d$，

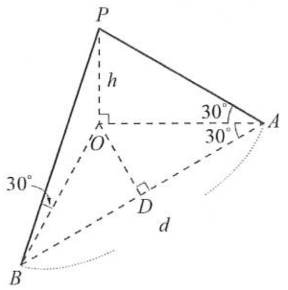
則 $\overline{OA}=\overline{OB}=\sqrt3h$，在 $\triangle OAB$ 中，由餘弦定理可知，

$\overline{OB}^2=\overline{OA}^2+\overline{AB}^2-2\,\overline{OA}\cdot\overline{AB}\cdot\cos30^\circ$

$\Rightarrow(\sqrt3h)^2=(\sqrt3h)^2+d^2-2\times\sqrt3h\times d\times\dfrac{\sqrt3}{2}$

$\Rightarrow d^2-3hd=0\Rightarrow d(d-3h)=0$

$\Rightarrow d=3h$ 或 $d=0$（不合）$\Rightarrow k=3$。



16. <法一>

因為出現順子的情形有下列 4 種，

即 $(1,2,3),(2,3,4),(3,4,5),(4,5,6)$，

所以同持擲三粒骰子一次，出現順子的機率為 $\dfrac{4\times3!}{6^3}=\dfrac{1}{9}$，

因而，可得出現順子的次數與其對應的機率，如下表所示，

出現順子的次數	0	1
對應的機率	$C_0^3\times(\frac{1}{9})^0\times(\frac{8}{9})^3$	$C_1^3\times\frac{1}{9}\times(\frac{8}{9})^2$
出現順子的次數	2	3
對應的機率	$C_2^3\times(\frac{1}{9})^2\times\frac{8}{9}$	$C_3^3\times(\frac{1}{9})^3\times(\frac{8}{9})^0$

所求的期望值為

$0\times\dfrac{1\times8^3}{9^3}+1\times\dfrac{3\times8^2}{9^3}+2\times\dfrac{3\times8}{9^3}+3\times\dfrac{1\times1}{9^3}$

$=\dfrac{1}{9^3}\times(0+192+48+3)=\dfrac{243}{729}=\dfrac{1}{3}$（次）。

<法二>

$\dfrac{1}{9}\times3=\dfrac{1}{3}$（次）。

17. 因直線 L 垂直 $\overline{BC}$，

故 $\triangle CQP\sim\triangle CBA$（$AA$ 相似）且 $\triangle RQA\sim\triangle CBA$（$AA$ 相似），

設 $\overline{QC}=a$，$\overline{QA}=b$，

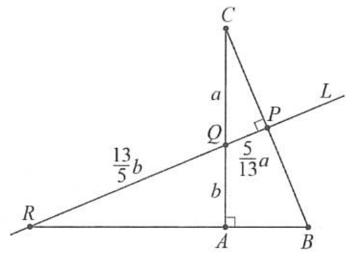
則 $a+b=12$，

$\overline{QP}=\dfrac{5}{13}a$，$\overline{RQ}=\dfrac{13}{5}b$，

$\overline{QP}\times\overline{QR}=\dfrac{5a}{13}\times\dfrac{13b}{5}=ab$，

由算幾不等式可知

$\dfrac{12}{2}\geq\sqrt{ab}\Rightarrow ab\leq36$。



第貳部分、混合題或非選擇題

18. 因圓心到 L 的距離等於半徑且圓心到 A 的距離等於半徑，

故 $|b-2|=\sqrt{(a-2)^2+(b-4)^2}$

$\Rightarrow(b-2)^2=(a-2)^2+(b-4)^2\Rightarrow b=\dfrac{1}{4}a^2-a+4$，

可知 (a,b) 落在 $y=\dfrac{1}{4}x^2-x+4$，

故選(3)。

19. 由上知 $b=\dfrac{1}{4}a^2-a+4$、半徑為 $|b-2|$，

$|b-2|=|\dfrac{1}{4}a^2-a+4-2|=|\dfrac{1}{4}(a-2)^2+1|$，（2 分）

當 $a=2$ 時，圓 C 的半徑會有最小值 1。（2 分）

20. <法一>

$\overleftrightarrow{AP}$：$y-4=\dfrac{4-(-2)}{2-(-6)}(x-2)$

$\Rightarrow\overleftrightarrow{AP}$：$y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{2}$

(a,b) 會在 $\overleftrightarrow{AP}$ 上，

且在 $y=\dfrac{1}{4}x^2-x+4$，

解 $\begin{cases}y=\dfrac{1}{4}x^2-x+4\\ y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{2}\end{cases}$（1 分）$\Rightarrow\dfrac{1}{4}x^2-x+4=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{2}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{7}{4}x+\dfrac{3}{2}=0\Rightarrow x^2-7x+6=0$，

解得 $x=1$ 或 6（2 分），又圓心在 $\overleftrightarrow{AP}$，但不在 $\overline{AP}$，

故 $x=6$，$y=7$，半徑 $=|7-2|=5$，

故圓 C：$(x-6)^2+(y-7)^2=25$。（3 分）

<法二>

直線 AP 的斜率為 $\dfrac{4-(-2)}{2-(-6)}=\dfrac{3}{4}$，

設 $\overline{AD}=4t$，則 $\overline{BD}=3t$，$\overline{AB}=5t$，（2 分）

因此 $\overline{BE}=\overline{AB}=5t$，$\overline{DE}=5t-3t=2t$，

而 D 的 y 坐標為 4，

因此 $\overline{DE}=2\Rightarrow2t=2\Rightarrow t=1$，（2 分）

$\Rightarrow B(2+4,4+3)=(6,7)$，圓半徑 $=5$，

故圓 C：$(x-6)^2+(y-7)^2=25$。（2 分）