數學考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(2)	(2)	(1)	(3)	(4)	(3)	(2)(3)(5)
8.	9.	10.	11.	12.		
(5)	(1)(2)(4)	(2)(3)(4)	(1)(2)	(2)(5)		

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

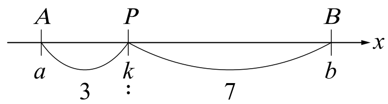
1. (2)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：數線上的分點公式

解析：設 $A(a)$，$B(b)$，$P(k)$ 為數線上三點，且 P 在 $\overline{AB}$ 上

因為 $k=0.7a+0.3b=\dfrac{7a+3b}{3+7}$，如下圖



所以由分點公式可得 $\dfrac{|k-a|}{|k-b|}=\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\dfrac{3}{7}$，故選(2)。

2. (2)

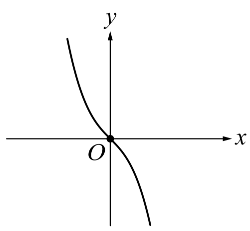
出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：三次函數 $y=ax^3+px$ 的圖形與平移

解析：因為 x^3 項的係數為 $-2<0$

且 x^3 項、x 項的係數為同號

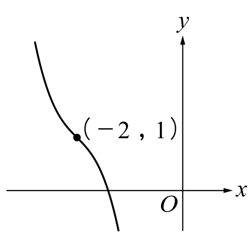
所以可知 $y=-2x^3-x$ 的圖形(對稱中心為 $(0\ ,0)$)如下



將 $y=-2x^3-x$ 的圖形向左平移 2 單位

再向上平移 1 單位後可得 $y=-2(x+2)^3-(x+2)+1$

其對稱中心為 $(-2\ ,1)$，如下圖，故選(2)。



3. (1)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：多項式的除法原理與餘式定理

解析：設 $f(x)=(x^2+x-6)q(x)+ax-1$

$=(x-2)(x+3)q(x)+ax-1$

由餘式定理可知 $g(x)$除以 $x-2$ 的餘式為 $g(2)=5$

$f(x)+g(x)$ 除以 $x-2$ 的餘式為 $f(2)+g(2)=8$

所以 $f(2)=8-g(2)=8-5=3\Rightarrow 2a-1=3\Rightarrow a=2$

$\Rightarrow f(x)=(x-2)(x+3)q(x)+2x-1$

因此 $f(x)$ 除以 $x+3$ 的餘式為

$f(-3)=2\times(-3)-1=-7$，故選(1)。

4. (3)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：幾何平均數

解析：今年一月的上漲率為 $\dfrac{4}{50}\times 100\ \%=8\ \%$

所以今年這三個月來的平均上漲率為

$\sqrt[3]{(1+0.08)(1+0.25)(1+0.28)}-1$

$=\sqrt[3]{\dfrac{108}{100}\times\dfrac{125}{100}\times\dfrac{128}{100}}-1=\dfrac{\sqrt[3]{2^9\times3^3\times5^3}}{100}-1=\dfrac{120}{100}-1$

$=0.2=20\ \%$

故選(3)。

5. (4)

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：指數律與利用常用對數估計大小

解析：由題表可知人口數最多的國家為加拿大

其人口數為 $39476000=3.9476\times10^7\approx 4\times10^7$

又 $\log 2\approx 0.3010$，所以 $10^{0.3010}\approx 2$

$\Rightarrow 4\times10^7=2^2\times10^7\approx(10^{0.3010})^2\times10^7$

$=10^{0.6020}\times10^7=10^{7.6020}\approx 10^{7.6}$

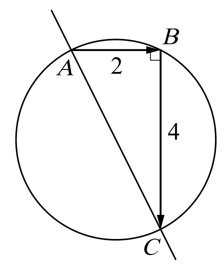
故選(4)。

6. (3)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：直線的斜率與圓的標準式

解析：作圖如下



可知直線 AC 的斜率為 $-a=\dfrac{-4}{2}=-2\Rightarrow a=2$

所以直線 AC 的方程式為 $2x+y-4=0$

因為$\angle ABC=90^\circ$

所以圓心在 $\overline{AC}$ 上且圓的直徑長為

$\overline{AC}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

$\Rightarrow$ 圓的半徑 $r=\sqrt{5}\Rightarrow r^2=5$

(1)╳：$\because x^2+y^2=5$ 的圓心 $(0\ ,0)$ 不在 $\overleftrightarrow{AC}$ 上

$\therefore$不可能為圓 Γ 的方程式

(2)╳：$\because(x-1)^2+(y-6)^2=5$ 的圓心 $(1\ ,6)$ 不在 $\overleftrightarrow{AC}$ 上

$\therefore$不可能為圓 Γ 的方程式

(3)○：$\because(x-1)^2+(y-2)^2=5$ 的半徑長為 $\sqrt{5}$

且圓心 $(1\ ,2)$ 在 $\overleftrightarrow{AC}$ 上

$\therefore$可能為圓 Γ 的方程式

(4)╳：$\because(x-1)^2+(y-6)^2=20$ 的半徑長為 $\sqrt{20}$

$\therefore$不可能為圓 Γ 的方程式

(5)╳：$\because(x-1)^2+(y-2)^2=20$ 的半徑長為 $\sqrt{20}$

$\therefore$不可能為圓 Γ 的方程式

故選(3)。

二、多選題

7. (2)(3)(5)

　出處：第二冊〈數列與級數〉

　目標：等比數列的一般項與等比級數和

　解析：設山崎、中村、涼太去年的年薪分別為

　a、ar、ar^2 萬元，其中 $r>0$

　可知 $r^2=2.25 \Rightarrow r=1.5=\dfrac{3}{2}$

　又 $a+ar+ar^2=304$

　所以可得 $a+\dfrac{3}{2}a+\dfrac{9}{4}a=\dfrac{19}{4}a=304 \Rightarrow a=64$

　$\Rightarrow ar=64\times\dfrac{3}{2}=96$

　$\Rightarrow ar^2=96\times\dfrac{3}{2}=144$

　即山崎、中村、涼太去年的年薪分別為

　64、96、144 萬元

　(1) ╳：去年中村的年薪比山崎年薪高

　(2) ○

　(3) ○

　(4) ╳：去年山崎的年薪為 64 萬元，即低於 65 萬元

　(5) ○

　故選(2)(3)(5)。

8. (5)

　出處：第一冊〈指數、對數〉、第二冊〈數列與級數〉

　目標：指數律、常用對數與等差數列

　解析：(1) ╳：反例：$a=\dfrac{1}{10}$ 時

　$\dfrac{1}{10}=10^{-1} \Rightarrow x_1=-1<0$

　(2) ╳：因為 $3a=10^{x_2}$，所以 $x_2=\log 3a$

　(3) ╳：因為 $9a=10^{x_3}$，所以 $x_3=\log 9a$

　(4) ╳：$10^{x_2}=3a=10^{\log 3}\times10^{x_1}=10^{x_1+\log 3}$

　$\Rightarrow x_2=x_1+\log 3$

　(5) ○：$10^{x_3}=9a=3\times3a=10^{\log 3}\times10^{x_2}=10^{x_2+\log 3}$

　$\Rightarrow x_3=x_2+\log 3$

　承(4)可知 $x_2=x_1+\log 3$

　所以 x_1，x_2，x_3 成等差數列，其公差為 $\log 3$

　故選(5)。

9. (1)(2)(4)

　出處：第二冊〈數據分析〉、第二冊〈三角比〉

　目標：標準差、相關係數、迴歸直線與直線的斜角

　解析：(1) ○：因為 $r=\dfrac{3}{4}>0$，所以 x 與 y 為正相關

　(2) ○：因為迴歸直線必過點 (μ_x , μ_y)

　所以將點 (4 , 500) 代入 L：$y=bx+a$

　可得 $a+4b=500$

　(3) ╳：$\sigma_x^2=\dfrac{1}{5}(x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_5^2)-\mu_x^2$

　$=\dfrac{1}{5}(x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_5^2)-16$

　$=\dfrac{16}{5}$

　$\Rightarrow x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_5^2=96$

　(4) ○：$r=\dfrac{450}{5\times\dfrac{4}{\sqrt{5}}\times\sigma_y}=\dfrac{3}{4}$

　$\Rightarrow \sigma_y=30\sqrt{5}$ (元)

　(5) ╳：因為迴歸直線 L 的斜角為 θ

　所以其斜率為 $\tan\theta=r\times\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{30\sqrt{5}}{\dfrac{4}{\sqrt{5}}}=\dfrac{225}{8}$

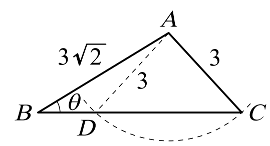
　故選(1)(2)(4)。

10. (2)(3)(4)

　出處：第一冊〈直線與圓〉、第二冊〈三角比〉

　目標：圓的定義、直角三角形與廣義角的三角比、正弦定理與餘弦定理

　解析：作圖如下



　(1) ╳：因為 $\angle BAC>90^\circ$

　所以由餘弦定理可知

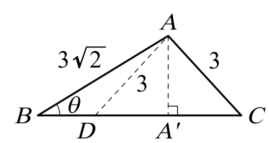
　$\cos\angle BAC=\dfrac{(3\sqrt{2})^2+3^2-\overline{BC}^2}{2\times3\sqrt{2}\times3}<0$

　$\Rightarrow \overline{BC}^2>(3\sqrt{2})^2+3^2=27$

　$\Rightarrow \overline{BC}>\sqrt{27}$

　故 $\overline{BC}$ 長不可能為 5

　(2) ○：過 A 作 $\overline{AA'}\perp\overline{BC}$ 於 A'，如下圖



　可知 $\overline{AA'}=\overline{AB}\sin\theta=3\sqrt{2}\sin\theta<\overline{AC}=3$

　$\Rightarrow \sin\theta<\dfrac{3}{3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sin 45^\circ$

　又 θ 為銳角

　所以可得 $0^\circ<\theta<45^\circ$

　(3) ○：承(2)可知 θ 可能為 15°

　(4) ○：在△ABC 中，由正弦定理可知

　$\dfrac{\overline{AC}}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin\angle ACB}$

　$\Rightarrow \dfrac{\sin\angle ACB}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}$

　(5) ╳：因為 $\overline{AD}=\overline{AC}$

　$\Rightarrow \angle ADC=\angle ACB$

　所以承(4)可得

$$\frac{\sin\angle ADB}{\sin\theta}=\frac{\sin(180^\circ-\angle ADC)}{\sin\theta}=\frac{\sin\angle ADC}{\sin\theta}=\frac{\sin\angle ACB}{\sin\theta}=\sqrt{2}$$

　故選(2)(3)(4)。

11. (1)(2)

出處：第一冊〈直線與圓〉

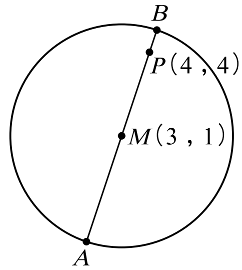
目標：圓的弦長

解析：設原田與武泰分別站在 A、B 兩點

可知 $P(4, 4)$ 在 $\overline{AB}$ 上

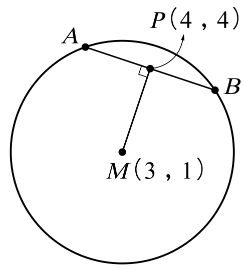
且 $\overline{MP}=\sqrt{(4-3)^2+(4-1)^2}=\sqrt{10}$，討論如下：

①當 $\overline{AB}$ 為直徑時，$\overline{AB}$ 有最大值，作圖如下



此時 $\overline{AB}=2\times4=8$

②當 $\overline{AB}\perp\overline{MP}$ 時，$\overline{AB}$ 有最小值，作圖如下



此時 $\overline{AB}=2\overline{AP}=2\sqrt{\overline{AM}^2-\overline{MP}^2}=2\sqrt{4^2-(\sqrt{10})^2}$

$=2\sqrt{6}\approx2\times2.449=4.898$

由①、②可得 $2\sqrt{6}\le\overline{AB}\le8$，故選(1)(2)。

12. (2)(5)

出處：第一冊〈直線與圓〉、第二冊〈數列與級數〉

目標：兩直線的關係，點到直線的距離、二元一次不等式與等比數列

解析：(1) ╳：因為 $A(x_1, y_1)$ 在第一象限

所以位於直線 $L：4x+3y=0$ 的右半平面

即滿足 $4x_1+3y_1>0$，故 $4x_1+3y_1+10\neq0$

(2) ○：$d(C, L)=\dfrac{|4\times15+3\times10|}{\sqrt{4^2+3^2}}=18$

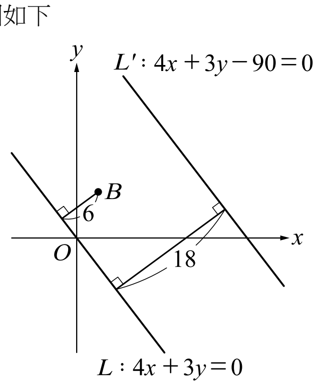
因為 2，$d(B, L)$，18 成等比數列

所以 $d(B, L)=\sqrt{2\times18}=6$

(3) ╳：設直線 $L'：4x+3y-90=0$

可知 $d(L', L)=\dfrac{|-90-0|}{\sqrt{4^2+3^2}}=18>6=d(B, L)$

作圖如下



所以 B 點位於 $L'：4x+3y-90=0$ 的左半平面

(4) ╳：因為 B 點位於直線 $4x+3y=0$ 的右半平面

所以 $4x_2+3y_2>0$

$\Rightarrow d(B, L)=\dfrac{|4x_2+3y_2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{4x_2+3y_2}{5}=6$

$\Rightarrow 4x_2+3y_2=30>20$

(5) ○：$m_{OC}=\dfrac{10-0}{15-0}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow\overleftrightarrow{OC}：y=\dfrac{2}{3}x\Rightarrow2x-3y=0$

若 O，A，C 三點共線，則

$A(x_1, y_1)$ 在 $\overleftrightarrow{OC}$ 上，即 $2x_1-3y_1=0$

又 $d(A, L)=\dfrac{|4x_1+3y_1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2\Rightarrow4x_1+3y_1=10$

所以解 $\begin{cases}2x_1-3y_1=0\\4x_1+3y_1=10\end{cases}\Rightarrow x_1=\dfrac{5}{3}$，$y_1=\dfrac{10}{9}$

$\Rightarrow x_1+y_1=\dfrac{5}{3}+\dfrac{10}{9}=\dfrac{25}{9}$

故選(2)(5)。

三、選填題

13. 780

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：等差中項與等差級數和

解析：設正三角形 T_1，T_2，……，T_{13} 的邊長分別為

S_1，S_2，……，S_{13}

可知 T_7 的面積為 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}S_7^2=100\sqrt{3}\Rightarrow S_7^2=400\Rightarrow S_7=20$

故 T_1，T_2，……，T_{13} 的周長總和為

$3S_1+3S_2+\cdots\cdots+3S_{13}=3(S_1+S_2+\cdots\cdots+S_{13})=3\times13S_7$

$=3\times13\times20=780$。

14. 160

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：期望值

解析：①當雨盛駕駛休旅車上下班時

所花油錢為 $30\times\dfrac{48}{8}=180$ (元)

②當雨盛駕駛房車上下班時

所花油錢為 $30\times\dfrac{48}{12}=120$ (元)

故所花油錢的期望值為

$180\times\dfrac{2}{3}+120\times\dfrac{1}{3}=120+40=160$ (元)。

15. $10\sqrt{3}$

出處：第二冊〈三角比〉

目標：餘弦定理與三角形面積公式

解析：設 $\overline{OA}=x$ 公分，時鐘的每小格為 $360^\circ\div60=6^\circ$

所以 4 點整時，$\angle AOB=6^\circ\times20=120^\circ$

由餘弦定理可得

$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\times\overline{OA}\times\overline{OB}\times\cos\angle AOB$

$\Rightarrow(2\sqrt{39})^2=x^2+4^2-2\times x\times4\times\cos120^\circ$

$\Rightarrow x^2+4x-140=0$

$\Rightarrow(x-10)(x+14)=0\Rightarrow x=10$ 或 -14 (不合)

故△OAB 面積為 $\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}\times\sin\angle AOB$

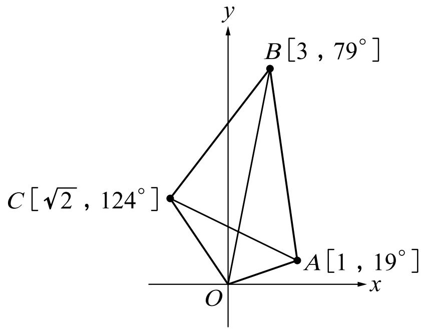
$=\dfrac{1}{2}\times10\times4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$ (平方公分)。

16. $\frac{5}{7}$

出處：第二冊〈三角比〉

目標：極坐標與正餘弦定理

解析：設 O 為極點，作圖如下



在△OAB 中，$\angle BOA=79^\circ-19^\circ=60^\circ$

由餘弦定理可得 $\overline{AB}^2=1^2+3^2-2\times1\times3\times\cos 60^\circ=7$

在△OBC 中，$\angle COB=124^\circ-79^\circ=45^\circ$

由餘弦定理可得 $\overline{BC}^2=3^2+(\sqrt{2})^2-2\times3\times\sqrt{2}\times\cos 45^\circ=5$

在△ABC 中，由正弦定理可得

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\angle BAC}=\frac{\overline{AB}}{\sin\angle ACB}\Rightarrow\frac{\sin\angle BAC}{\sin\angle ACB}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

故 $\frac{\sin^2\angle BAC}{\sin^2\angle ACB}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2}=\frac{5}{7}$。

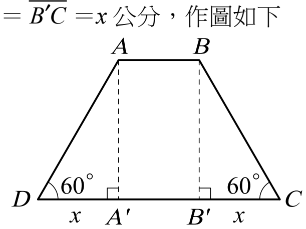
17. $50\sqrt{3}$

出處：第一冊〈多項式函數〉、第二冊〈三角比〉

目標：直角三角形的邊角關係與二次函數的最大值

解析：過 A，B 作 $\overline{AA'}\perp\overline{CD}$ 於 A'，$\overline{BB'}\perp\overline{CD}$ 於 B'

設 $\overline{A'D}=\overline{B'C}=x$ 公分，作圖如下



可知 $\overline{AA'}=\overline{BB'}=x\tan 60^\circ=\sqrt{3}x$

$\overline{AD}=\overline{BC}=\frac{x}{\cos 60^\circ}=2x$

且 $\overline{AB}=\overline{A'B'}$

因為等腰梯形 $ABCD$ 的周長為 40 公分

所以可得

$2(\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{A'D})=2(\overline{AB}+2x+x)=40$

$\Rightarrow\overline{AB}=20-3x$

$\Rightarrow\overline{CD}=2x+(20-3x)=20-x$

因此可得等腰梯形 $ABCD$ 面積為

$$\frac{(\overline{AB}+\overline{CD})\times\overline{AA'}}{2}=\frac{[(20-3x)+(20-x)]\times\sqrt{3}x}{2}$$
$$=\sqrt{3}x\,(20-2x)$$
$$=-2\sqrt{3}x^2+20\sqrt{3}x$$
$$=-2\sqrt{3}\,(x-5)^2+50\sqrt{3}$$

其中 $0<x<\frac{20}{3}$

故當 $x=5$ 時，其面積的最大值為 $50\sqrt{3}$ 平方公分。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. (3)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：含絕對值的一次方程式

解析：設曉振住家、公司、郵局分別位於數線上 $A(0)$、$B(5)$、$P(x)$ 三點，其中 $x<\frac{5}{2}$

可知 $|x|+|x-5|=9$，討論如下：

①當 $0<x<\frac{5}{2}$ 時

可得 $x+(5-x)=9\Rightarrow$ 無解

②當 $x<0$ 時

可得 $-x+(5-x)=9\Rightarrow x=-2\Rightarrow P(-2)$

因此由住家先到公司，再從公司到郵局的距離為

$\overline{AB}+\overline{BP}=|5-0|+|5-(-2)|$

$=12$ (公里)

故選(3)。

19. $\frac{11}{32}$

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：古典機率

解析：〈解法一〉

P(至少有兩人在同一節車廂上車)

$=1-P$(三人均在不同車廂上車)

$=1-\frac{8\times7\times6}{8^3}$

$=\frac{11}{32}$。

〈解法二〉

P(至少有兩人在同一節車廂上車)

$=P$(恰有兩人在同一節車廂上車)

$+P$(三人均在同一節車廂上車)

$=\frac{C_2^3C_1^8C_1^7}{8^3}+\frac{C_1^8}{8^3}$

$=\frac{11}{32}$。

◎評分原則

〈解法一〉

P(至少有兩人在同一節車廂上車)

$=1-P$(三人均在不同車廂上車)

$=1-\frac{8\times7\times6}{8^3}$ (3 分)

$=\frac{11}{32}$。 (3 分)

〈解法二〉

P(至少有兩人在同一節車廂上車)

$=P$(恰有兩人在同一節車廂上車)

$+P$(三人均在同一節車廂上車)

$=\frac{C_2^3C_1^8C_1^7}{8^3}+\frac{C_1^8}{8^3}$ (3 分)

$=\frac{11}{32}$。 (3 分)

20. 204 種

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：含有相同物品的排列

解析：〈解法一〉

上餐順序的方法數為

$$\underbrace{4!}_{\text{先排和牛壽喜燒、和牛滷肉飯、和牛握壽司、和牛肉湯麵}} \times \underbrace{C^5_2}_{\text{空隙插入 2 份爐烤和牛}} - \underbrace{3!\times C^4_2}_{\text{和牛滷肉飯排在最後}}$$

$=240-36=204$ (種)。

〈解法二〉

設 A 表示同樣餐點連續上餐的集合

B 表示和牛滷肉飯最後上餐的集合

且 U 為宇集

所求為 $n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)$

$=n(U)-n(A)-n(B)+n(A\cap B)$

$=\dfrac{6!}{2!}-5!-\dfrac{5!}{2!}+4!$

$=360-120-60+24=204$ (種)。

◎評分原則

〈解法一〉

上餐順序的方法數為

$$\underbrace{4!}_{\text{先排和牛壽喜燒、和牛滷肉飯、和牛握壽司、和牛肉湯麵}} \times \underbrace{C^5_2}_{\text{空隙插入 2 份爐烤和牛}} - \underbrace{3!\times C^4_2}_{\text{和牛滷肉飯排在最後}} \quad (3\text{ 分})$$

$=240-36=204$ (種)。 (3 分)

〈解法二〉

設 A 表示同樣餐點連續上餐的集合

B 表示和牛滷肉飯最後上餐的集合

且 U 為宇集

所求為 $n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)$

$=n(U)-n(A)-n(B)+n(A\cap B)$

$=\dfrac{6!}{2!}-5!-\dfrac{5!}{2!}+4!$ (3 分)

$=360-120-60+24=204$ (種)。 (3 分)