新北基高中 113 年(112 學年度)
高三上 第二次學測模擬考數學(112-E2)試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題

一、單選題

1. 炎炎夏日，對於戶外工作者容易出現熱傷害，有效的評估環境狀況，予以合適的控制與管理，可避免造成勞工工作危害。根據法令規範明定以綜合溫度熱指數（WBGT）作為熱危害評估指標，當室內或戶外無日曬情形者，其綜合溫度熱指數計算方法如下（單位：攝氏溫度℃）：

$$\text{綜合溫度熱指數}=0.7\times(\text{自然濕球溫度})+0.3\times(\text{黑球溫度})$$

其中自然濕球溫度為大氣濕度飽和情況下的溫度；黑球溫度為反映環境的熱輻射溫度。已知某室內作業工作環境狀況的自然濕球溫度為 a℃、黑球溫度為 b℃，且計算出的綜合溫度熱指數為 k℃。若 $a<k<b$，則 $\dfrac{|k-a|}{|k-b|}$ 之值為下列何者？

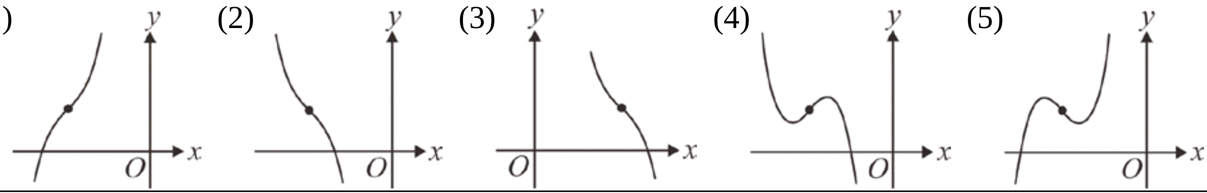
(1) $\dfrac{2}{5}$　(2) $\dfrac{3}{7}$　(3) 1　(4) $\dfrac{7}{3}$　(5) $\dfrac{5}{2}$

答：(2)

解：$k=0.7\times a+0.3\times b \Rightarrow 0.7(k-a)=0.3(b-k)\Rightarrow \dfrac{k-a}{k-b}=\dfrac{-0.3}{0.7} \Rightarrow \dfrac{|k-a|}{|k-b|}=\dfrac{3}{7}$

2. 試問將 $y=-2x^3-x$ 的圖形向左平移 2 單位，再向上平移 1 單位後，可得到下列哪個選項中的圖形？

(1)　(2)　(3)　(4)　(5)



答：(2)

解：所求：$y=-2(x+2)^3-(x+2)+1$

3. 設 $f(x)$、$g(x)$ 為實係數多項式，已知 $f(x)$ 除以 x^2+x-6 的餘式為 $ax-1$，$g(x)$ 除以 $x-2$ 的餘式為 5，且 $f(x)+g(x)$ 除以 $x-2$ 的餘式為 8。試問 $f(x)$ 除以 $x+3$ 的餘式為下列何者？

(1) -7　(2) -1　(3) 3　(4) 5　(5) 13

答：(1)

解：

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=(x^2+x-6)Q_1(x)+ax-1\\ g(x)&=(x-2)Q_2(x)+5\\ f(x)+g(x)&=(x-2)Q_3(x)+8\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&f(2)=2a-1,\ g(2)=5\\ &\Rightarrow(2a-1)+5=8\\ &\Rightarrow a=2\end{aligned}$$

所求：$f(-3)=-3a-1=-7$

4. 受到禽流感與俄烏戰爭下高昂的飼料成本等因素衝擊，全球蛋農選擇減產甚至停產，造成雞蛋供應量減少、蛋價飆漲。已知某地區去年底雞蛋的零售價為每臺斤 50 元，今年一月比去年底每臺斤漲 4 元，今年二月比一月每臺斤價格上漲 25%，三月比二月每臺斤價格上漲 28%，則今年這三個月來，雞蛋零售價每月的平均上漲率為下列何者？
(1) 18%　(2) 19%　(3) 20%　(4) 21%　(5) 22%

答：(3)

解：$\sqrt[3]{\frac{54}{50}\times(1+25\%)\times(1+28\%)}-1=1.2-1=0.2=20\%$

5. 下表為截至日期 2023 年 3 月 1 日部分國家人口數的統計表，

國家	摩洛哥	馬來西亞	荷蘭	加拿大	澳洲
人口數	36885000	32693000	17843000	39476000	26326000

試問上表中人口數最多的國家，其人口數與下列何者最接近？
(1) 10^{7}　(2) $10^{7.2}$　(3) $10^{7.4}$　(4) $10^{7.6}$　(5) $10^{7.8}$

答：(4)

解：加拿大 $\fallingdotseq 4\times10^{7}\fallingdotseq10^{\log4+7}=10^{7.6}$

6. 在坐標平面上，已知 A、B、C 點為圓 Γ 上三點。若將 A 點向右平移 2 單位後可得 B 點，將 B 點向下平移 4 單位後可得 C 點，且直線 AC 的方程式為 $ax+y-4=0$，則圓 Γ 的方程式可能為下列何者？
(1) $x^2+y^2=5$　(2) $(x-1)^2+(y-6)^2=5$　(3) $(x-1)^2+(y-2)^2=5$
(4) $(x-1)^2+(y-6)^2=20$　(5) $(x-1)^2+(y-2)^2=20$

答：(3)

解：斜率 $=-a=\frac{-4}{+2}\Rightarrow a=2$，$\overleftrightarrow{AC}$：$2x+y-4=0$

(1) $O(0,0)$，$r=\sqrt{5}\Rightarrow\left(\frac{|-4|}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2\neq5$，矛盾

(2) $O(1,6)$，$r=\sqrt{5}\Rightarrow\left(\frac{|4|}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2\neq5$，矛盾

(4) $O(1,6)$，$r=\sqrt{20}\Rightarrow\left(\frac{|4|}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2\neq20$，矛盾

(3) $O(1,2)$，$r=\sqrt{5}\Rightarrow\left(\frac{0}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2=5$，成立

(5) $O(1,2)$，$r=\sqrt{20}\Rightarrow\left(\frac{0}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2=20$，矛盾

二、多選題

7. 以下為山崎和兩位好友涼太與中村在某次聚會中的一段對話：
山崎：我們三人去年的年薪居然可以組成一個公比為正數的等比數列。
涼太：對啊！而且去年三人年薪的總和為 304 萬元，都可以合資購買一塊小農地了。
山崎：去年因為疫情放太多無薪假，所以我的年薪才會是三人中最低的。
中村：雖然去年我受到疫情的影響比較小，但是年薪還是遠遠不及涼太。
涼太：去年老闆一直要求加班，所以我的年薪才會是山崎年薪的 2.25 倍。
由以上三人的對話，試選出正確的選項。
(1)去年中村的年薪比山崎年薪低 (2)去年涼太的年薪是三人中最高的
(3)去年涼太的年薪是中村年薪的 1.5 倍 (4)去年山崎的年薪高於 65 萬元
(5)去年中村的年薪為 96 萬元

答：(2)(3)(5)

解：$a+ar+ar^2=304$ 且 $r^2=2.25 \Rightarrow r=1.5$，$a=64$，故山崎 64，中村 96，涼太 144

8. 設一正數 a 可以寫成 10 的 x_1 次方，$3a$ 可以寫成 10 的 x_2 次方，$9a$ 可以寫成 10 的 x_3 次方，試選出正確的選項。
(1) $x_1>0$ (2) $x_2=\log a^3$ (3) $x_3=9\log a$
(4) $x_2=(\log 3)x_1$ (5) x_1，x_2，x_3成等差數列

答：(5)

解：$a=10^{x}$，$3a=10^{x_2}$，$9a=10^{x_3}$
$\Rightarrow x_2=x_1+\log 3$，$x_3=x_2+\log 3 \Rightarrow \langle x_n \rangle$成等差，公差$\log 3$
$\Rightarrow x_1=\log a$，$x_2=\log 3a$，$x_3=\log 9a$

9. 截至 2023 年 3 月，已連續 3 年 8 個月沒有颱風登陸，使得水情再度拉警報。中村隨機調查同社區的五戶家庭人數 x（單位：人）與上期水費 y（單位：元）的二維數據 (x_i, y_i)，$i=1,2,\cdots\cdots,5$。已知 x 的平均數為 $\mu_x=4$(人)與標準差為 $\sigma_x=\frac{4}{\sqrt{5}}$(人)，$y$ 的平均數為 $\mu_y=500$(元)，x 與 y 的相關係數為 $r=\frac{3}{4}$，以及
$(x_1-\mu_x)(y_1-\mu_y)+(x_2-\mu_x)(y_2-\mu_y)+\cdots\cdots+(x_5-\mu_x)(y_5-\mu_y)=450$。
設 y 對 x 的迴歸直線（最適直線）為 L ： $y=bx+a$，直線 L 的斜角為 θ，
試選出正確的選項。
(1) x 與 y 為正相關 (2) $a+4b=500$ (3) $x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_5^2=80$
(4) y 的標準差為 $30\sqrt{5}$ 元 (5) $\tan\theta=\frac{45}{8}$

答：(1)(2)(4)

$\boxed{解}$：$r=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\mu_x\right)\left(y_i-\mu_y\right)}{5\sigma_x\sigma_y}\Rightarrow\dfrac{3}{4}=\dfrac{450}{5\times\dfrac{4}{\sqrt{5}}\times\sigma_y}\Rightarrow\sigma_y=30\sqrt{5}$

$b=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\mu_x\right)\left(y_i-\mu_y\right)}{5\sigma_x\sigma_x}=\dfrac{450}{5\times\dfrac{4}{\sqrt{5}}\times\dfrac{4}{\sqrt{5}}}=\dfrac{225}{8}=\tan\theta$

$L:\left(y-500\right)=\dfrac{225}{8}\left(x-4\right)\Rightarrow y=\dfrac{225}{8}x+\dfrac{775}{2}$

故 $a+4b=\dfrac{775}{2}+\dfrac{225}{2}=500$

$\sigma_x=\sqrt{\dfrac{1}{5}\sum x_i^2-\mu x^2}\Rightarrow\dfrac{4}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{1}{5}\sum x_i^2-4^2}\Rightarrow\sum x_i^2=96$

10. 在 ΔABC 中，已知 $\angle BAC>90^\circ$，$\overline{AB}=3\sqrt{2}$，$\overline{AC}=3$，且以 A 點為圓心，3 為半徑作一弧交 $\overline{BC}$ 於 D 點（異於 C 點）。設 $\angle ABC=\theta$，試選出正確的選項。

(1) $\overline{BC}$ 長可能為 5　(2) $\sin\theta<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(3) θ 可能為 15°

(4) $\dfrac{\sin\angle ACB}{\sin\theta}=\sqrt{2}$　(5) $\dfrac{\sin\angle ADB}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\boxed{答}$：(2)(3)(4)

$\boxed{解}$：(1) $\angle A$ 為鈍角 $\Rightarrow 3^2+\left(3\sqrt{2}\right)^2<\overline{BC}^2\Rightarrow\overline{BC}>3\sqrt{3}>5$

(2) $\sin\theta<\dfrac{3}{3\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $\sin15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}<\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\theta$ 可能為 15°

(4) $\dfrac{\sin\angle ACB}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}$

(5) $\dfrac{\sin\angle ADB}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}$

11. 原田在體育課時和同學進行新型躲避球對抗賽，其規則為外場與內場各 5 人。在操場的坐標地圖上，外場 5 人必須站在以點 $M\left(3,1\right)$ 為圓心，半徑為 4 公尺的圓 Γ 上進行丟球攻擊，而內場 5 人則必須在圓 Γ 內進行閃躲，一旦被外場人員丟球擊中則淘汰出局。已知負責外場的原田朝著內場站在點 $P\left(4,4\right)$ 的宮本丟出一直球，結果被宮本閃過，最後此球在落地前被站在圓 Γ 上的外場人員武泰接住。試問此時原田與武泰的距離可能為下列哪些選項？（1 單位為 1 公尺）

(1) 8 公尺　(2) 5 公尺　(3) 4 公尺　(4) 3 公尺　(5) 2 公尺

答：(1)(2)

解：$d\left((3,1),(4,4)\right)=\sqrt{10}$，$r=4$

最短弦長$=2\sqrt{4^2-\left(\sqrt{10}\right)^2}=2\sqrt{6}$，最長弦長$=2r=8$。則$2\sqrt{6}\fallingdotseq 4.\cdots\le$所求$\le 8$

12. O為坐標平面上的原點，已知$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，$C(15,10)$為第一象限內三點，且A、B、C三點與直線L：$4x+3y=0$的距離成等比數列，其中A點與直線L的距離為2，試選出正確的選項。
(1) A點在直線$4x+3y+10=0$上
(2) B點與直線L的距離為 6
(3) B點位於直線$4x+3y-90=0$的右半平面
(4) $4x_2+3y_2<20$
(5)若O,A,C三點共線，則$x_1+y_1=\dfrac{25}{9}$

答：(2)(5)

解：$d\left(C(15,10),L\right)=\dfrac{|60+30|}{5}=18\xrightarrow{d(A,L)=2}d(B,L)=6$

$d(A,L)=2\ \Rightarrow A\in 4x+3y=10$，$B\in 4x+3y=30>20$

$C\in 4x+3y=90$，B在$4x+3y=90$左半面

O,A,C共線時$\xrightarrow{C(15,10)}A(3t,2t)\in 4x+3y=10\Rightarrow t=\dfrac{5}{9}$，$A\left(\dfrac{15}{9},\dfrac{10}{9}\right)$

三、選填題

13. 將 13 個大小不同的正三角形，依面積的大小，由小至大依序編號為$T_1,T_2,\cdots\cdots,T_{13}$。已知三角形$T_1,T_2,\cdots\cdots,T_{13}$的邊長依序成一個等差數列，且三角形$T_7$的面積為$100\sqrt{3}$，則這 13 個正三角形的周長總和為________。

答：780

解：$T_7=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2=100\sqrt{3}\ \Rightarrow x=20\ \Rightarrow T_7$周長$=20\times 3=60$

總周長$=13\times 60=780$

14. 雨盛有兩輛休旅車與一輛房車，每天隨機選擇駕駛其中一輛車上下班，其來回行駛的總距離為 48 公里。已知雨盛的兩輛休旅車平均油耗均為每公升汽油可行駛 8 公里，而房車的平均油耗為每公升汽油可行駛 12 公里。若每公升汽油的價格為 30 元，則雨盛每天上下班所花油錢的期望值為________元。

答：160

解：$E(X)=\left(4\times\dfrac{1}{3}+6\times\dfrac{2}{3}\right)\times 30=160$

15. 如圖，秉憲有一時鐘的中心為O，其分針長度為$\overline{OA}$，時針長度$\overline{OB}$為 4 公分。已知秉憲在時間 4 點整時，測得$\overline{AB}$長為$2\sqrt{39}$公分，則此時由分針與時針所張成的ΔOAB面積為________平方公分。（化為最簡根式）

答： $10\sqrt{3}$

解： $\cos 120^\circ = \dfrac{4^2 + \overline{OA}^2 - \left(2\sqrt{39}\right)^2}{2\times 4\times \overline{OA}} \Rightarrow \overline{OA}=10 \Rightarrow$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\times 10\times 4\times \sin 120^\circ = 10\sqrt{3}$

16. 已知坐標平面上三點的極坐標分別為 $A[1,19^\circ]$、$B[3,79^\circ]$、$C[\sqrt{2},124^\circ]$，在 ΔABC 中，則 $\dfrac{\sin^2\angle BAC}{\sin^2\angle ACB}=$ ________。（化為最簡分數）

答： $\dfrac{5}{7}$

解： $\dfrac{\sin^2\angle BAC}{\sin^2\angle ACB}=\dfrac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2}=\dfrac{9+2-2\times 3\times\sqrt{2}\times\cos 45^\circ}{1+9-2\times 1\times 3\times\cos 60^\circ}=\dfrac{5}{7}$

17. 木工師傅尚野想幫朋友的一尊神像打造一個底面為等腰梯形 $ABCD$ 的平面底座，其中 $\overline{AB}//\overline{CD}$，$\overline{AD}=\overline{BC}$，且 $\angle ADC=\angle BCD=60^\circ$。若等腰梯形 $ABCD$ 的周長為 40 公分，則其面積的最大值為________平方公分。（化為最簡根式）

答： $50\sqrt{3}$

解： 上底 x，下底 $x+2y$，高 $\sqrt{3}y$，腰 $2y$

周長 $=x+x+2y+2y+2y=40 \Rightarrow x+3y=20$

面積 $=\dfrac{(x+x+2y)\times\sqrt{3}y}{2}=\dfrac{(40-4y)\sqrt{3}y}{2}=\dfrac{-4\sqrt{3}(y-5)^2+100\sqrt{3}}{2}$

當 $y=5$，即 $x=5$ 時，有 $Max=50\sqrt{3}$

第貳部分：混合題或非選擇題

18-20 題為題組

行政院院長表示去年全國稅收超徵 4500 億，所以預計將其中的 1400 億「還稅於民」，每人可以領取 6000 元現金，採「登記入帳」、「ATM 領現」、「郵局領現」、「直接入帳」及「造冊發放」等 5 種方式。已知曉振住家與附近郵局及上班的公司位於同一條筆直的道路上，且住家與公司的距離為 5 公里。因為郵局與曉振住家的距離比郵局與公司的距離近，所以在今早上班前先從住家沿著此條道路開車到郵局領取 6000 元，再從郵局到公司，總共只需行駛 9 公里，試回答下列問題。

18. 若曉振先從住家沿著此條道路開車到公司上班，四點下班再從公司到郵局領取 6000 元，則共需行駛多少公里？（單選題）

(1) 10 公里　(2) 11 公里　(3) 12 公里　(4) 13 公里　(5) 14 公里

答：(3)

解： 曉振家 (0)，公司 (5)，郵局 (x) $\Rightarrow |x-0|+|x-5|=9$

$\Rightarrow x=-2$ 或 7（不合，$\because |x-0|<|x-5|$）

所求 $=|0-5|+|5-(-2)|=12$

19. 曉振打算週末用此 6000 元請李英與金喜兩位好友用餐，並相約分別從路竹站、中洲站、保安站搭乘同一班區間車至臺南站集合。已知此班區間車共有 8 節車廂，且每人選擇任一節車廂上車的機率均相等。試求在此三人中，至少有兩人在同一節車廂上車的機率為何？

答：$\dfrac{11}{32}$

解：全－皆不同車廂 $=1-\dfrac{C_3^8\times 3!}{8^3}=1-\dfrac{21}{32}=\dfrac{11}{32}$

20. 曉振與兩位好友到臺南某餐廳享用三人共享餐，其餐點為 2 份爐烤和牛、1 份和牛壽喜燒、1 份和牛滷肉飯、1 份和牛握壽司、1 份和牛肉湯麵。已知該餐廳上餐順序的規則如下：
①每次只上 1 份餐點。
②同樣餐點不得連續上餐。
③和牛滷肉飯不得最後上餐。
試問此 6 份餐點共有幾種不同的上餐順序？

答：204 種

解：上餐順序的方法數為

$$\underbrace{4!}_{\text{先排和牛壽喜燒、和牛滷肉飯、和牛握壽司、和牛肉湯麵}}\times\underbrace{C_2^5}_{\text{空隙插入 2 份爐烤和牛}}-\underbrace{3!\times C_2^4}_{\text{和牛滷肉飯排在最後}}=240-36=204\text{（種）}$$

解：設 A 表示同樣餐點連續上餐的集合
B 表示和牛滷肉飯最後上餐的集合
且 U 為宇集

所求為 $n(A'\cap B')=n\left((A\cup B)'\right)=n(U)-n(A\cup B)$
$=n(U)-n(A)-n(B)+n(A\cap B)$
$=\dfrac{6!}{2!}-5!-\dfrac{5!}{2!}+4!=360-120-60+24=204$（種）