全國公私立高級中學 112 學年度學科能力測驗　高二復習考

數學考科解析

考試日期：113 年 2 月 26~27 日

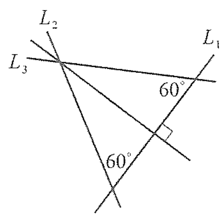
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13-1	13-2	14-1
5	4	4	3	1	4	1345	34	15	1235	245	145	7	4	2
14-2	15	16-1	16-2	17-1	17-2	18	19-1	19-2	20					
4	9	1	5	3	6	3	2	2						

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. $A=0.\overline{ab}=0.\overline{ababab}$，
$B=0.\overline{aba}=0.\overline{abaaba}$，
$A-B=\dfrac{100(b-a)+10(a-b)+(b-a)}{999999}=\dfrac{91(b-a)}{999999}=\dfrac{b-a}{10989}$，
若 $A-B=\dfrac{b-a}{10989}$ 有最小值，則 $b-a=1$，
故 $(a,b)=(0,1),\cdots,(8,9)$ 共 9 組，
故選(5)。

2. 如圖，L 為 L_2 和 L_3 的銳角平分線，
因為 L_1,L_2,L_3 所圍成的圖形為正三角形，
所以 $L\perp L_1$，又 L 的斜率為 $-\dfrac{3}{2}$，故 L_1 的斜率為 $\dfrac{2}{3}$，
設 $L_1：2x-3y=k$，代入 $(-1,\dfrac{7}{2})$，
得 $k=-2-\dfrac{21}{2}=-\dfrac{25}{2}$，
所以 $L_1：2x-3y=-\dfrac{25}{2}$，
整理後為 $L_1：4x-6y=-25$，
故選(4)。



3. $\dfrac{1}{\overline{OP}}=\cos\theta\Rightarrow\overline{OP}=\dfrac{1}{\cos\theta}$，
$\dfrac{\overline{BP}}{1}=\tan\theta\Rightarrow\overline{BP}=\tan\theta$，
由內分比性質：$\dfrac{\overline{OA}}{\overline{BA}}=\dfrac{\overline{OP}}{\overline{BP}}=\dfrac{\frac{1}{\cos\theta}}{\tan\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta}$，
又 $\overline{OA}+\overline{BA}=1$，因此 $\overline{OA}=\dfrac{1}{1+\sin\theta}\times\overline{OB}=\dfrac{1}{1+\sin\theta}$，
故選(4)。

4. $a_n=n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+9)=\dfrac{(2n+9)\times10}{2}$
$=10n+45$，
可知 a_n 的個位數字為 5，
故選(3)。

5. (1) 花色為黑桃的牌有 13 張，故機率為 $\dfrac{1}{13}$。
(2) 數字牌有 2～10 共 $9\times4=36$ 張，故機率為 $\dfrac{1}{36}$。
(3) 奇數牌有 3 , 5 , 7 , 9 共 $4\times4=16$ 張，故機率為 $\dfrac{1}{16}$。
(4) 偶數牌有 2 , 4 , 6 , 8 , 10，沒有 7，故機率為 0。
(5) 質數牌有 2 , 3 , 5 , 7 共 $4\times4=16$ 張，故機率為 $\dfrac{1}{16}$。
故選(1)。

6. 設填滿至第 n 格所需的麥子數為 S_n，
$S_n=2^0+2^1+\cdots+2^{n-1}=\dfrac{2^0(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$，
依題意得 $S_n=2^n-1\le5000\times1000\times30000$，
即 $2^n\le3\times5\times10^{10}$（$2^n-1\approx2^n$），
$(10^{0.3010})^n\le(10^{0.4771})\times(10^{0.6990})\times10^{10}$，
$10^{0.3010n}\le10^{0.4771+0.6990+10}\Rightarrow0.3010n\le11.1761$，
$0.3010n\le11.1761\Rightarrow n\le\dfrac{11.1761}{0.3010}=37.12\cdots$，
故選(4)。

二、多選題

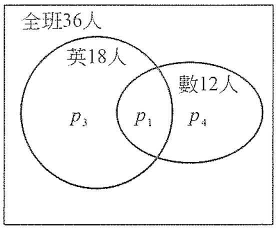
7. (1) ○：$-4\le x-4\le4\Rightarrow0\le x\le8$。
(2) ×：$-3x\le x-4\le3x\Rightarrow\begin{cases}-3x\le x-4\\x-4\le3x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge1\\x\ge-2\end{cases}$，
可得 $x\ge1$。
(3) ○：(a) 當 $x\ge6$，$(x-4)+(x-6)\le8\Rightarrow x\le9$，
(b) 當 $4\le x\le6$，$(x-4)-(x-6)\le8\Rightarrow$ 恆成立，
(c) 當 $x\le4$，$-(x-4)-(x-6)\le8\Rightarrow x\ge1$，
合併(a)(b)(c) $\Rightarrow1\le x\le9$。
(4) ○：$|x-4|+|12-x|\ge|(x-4)+(12-x)|=8$，
當等號成立時
$(x-4)(12-x)\ge0\Rightarrow(x-4)(x-12)\le0$，
得 $4\le x\le12$。
(5) ○：(a) 當 $x\ge16$，$|(x-4)-(x-16)|=12\le8\Rightarrow$ 矛盾，
(b) 當 $4\le x\le16$，$|(x-4)+(x-16)|\le8$
$\Rightarrow-8\le2x-20\le8\Rightarrow6\le x\le14$，
(c) 當 $x\le4$，$|-(x-4)+(x-16)|=12\le8\Rightarrow$ 矛盾。
故選(1)(3)(4)(5)。

8. (1) ×：從圖表中看不出最低年薪的變化。
(2) ×：四位位差 $=Q_3-Q_1$，從圖中可計算出 101 年～110 年的四分位差，並未呈現逐年增加的狀況。
(3) ○：110 年的中位數為 50.6 萬元，低於平均數 67 萬元，表示有至少一半的人年薪未達平均數。
(4) ○：由分布圖可看出，隨著平均數增加，中位數也增加，因此呈現正相關。
(5) ×：逐年增加的平均年薪，無法判別全距的變化性。
故選(3)(4)。

9. 設 $y=f(x)$ 的對稱中心為 (h,k)，
$f(x)=2x^3-6x^2+10x-1=2(x-h)^3+p(x-h)+k$
即其中 $h=-(\dfrac{-6}{3\times2})=1$，$k=f(1)=2-6+10-1=5$，
故對稱中心為 $(1,5)$，又 $f(0)=-1=-2-p+5\Rightarrow p=4$，
所以 $f(x)=2(x-1)^3+4(x-1)+5$。
(1) ○：$y=f(x)$ 的對稱中心為 $(1,5)$。
(2) ×：(r,s) 對 $(1,5)$ 做對稱點得 $(2-r,10-s)$。
(3) ×：$y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 附近一次近似直線為
$y=4(x-1)+5$。
(4) ×：$y=2(x-1)^3+4(x-1)+5$ 平移後與
$y=2x^3-4x$ 無法重合。
(5) ○：$y=2(x-1)^3+4(x-1)+5$ 平移後可與
$y=2x^3+4x+5$ 重合。
故選(1)(5)。

10. (1) ○：$a_1=S_1=1^2-2=-1$。
(2) ○：$a_2=S_2-S_1=(2^2-4)-(-1)=1$。
(3) ○：$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-2n)-[(n-1)^2-2(n-1)]$
$=2n-3$，$(n\geq 2)$ 且 $a_1=-1$，
故 $\langle a_n \rangle$ 為一公差等於 2 的等差數列。
(4) ×：$a_n=2n-3$。
(5) ○：$a_3=2\times 3-3=3$，$S_3=3^2-2\times 3=3$。
故選(1)(2)(3)(5)。

11. (1) ×：因為底數 $10>1$ 且 $\frac{\sqrt{3}}{3}-1<0$，
所以 $10^{\frac{\sqrt{3}}{3}-1}<10^0=1$。
(2) ○：$b=a^{-\sqrt{3}}=(10^{\frac{\sqrt{3}}{3}-1})^{-\sqrt{3}}=10^{\sqrt{3}-1}>10^0=1$。
(3) ×：$b^{\sqrt{2}}=(a^{-\sqrt{3}})^{\sqrt{2}}=a^{-\sqrt{6}}$，
因為 $0<a<1$ 且 $-\sqrt{6}<-2$，所以 $a^{-\sqrt{6}}>a^{-2}$。
(4) ○：因為 $b=10^{\sqrt{3}-1}\approx 10^{0.732}$，所以 $10^{0.7}<10^{0.732}<10^{0.8}$。
(5) ○：$(ab)^{\sqrt{3}}=(10^{\frac{\sqrt{3}}{3}-1}\times 10^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}}=10^{1-\sqrt{3}}\times 10^{3-\sqrt{3}}=10^{4-2\sqrt{3}}$
$\Rightarrow 10^{4-2\sqrt{3}}\approx 10^{0.536}<10^1$。
故選(2)(4)(5)。

12. 

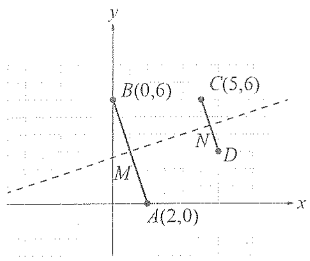
(1) ○：$0\leq p_1\leq 12$。
(2) ×：因為 $p_2=18+12-p_1=30-p_1$，所以 $18\leq p_2\leq 30$。
(3) ×：因為 $p_3=18-p_1$，所以 $6\leq p_3\leq 18$。
(4) ○：因為 $p_4=12-p_1$，所以 $0\leq p_4\leq 12$。
(5) ○：因為 $p_5=18+12-2p_1=30-2p_1$，所以 $6\leq p_5\leq 30$。
故選(1)(4)(5)。

三、選填題

13. 依照兩者皆會的人進行分類
(Ⅰ) 兩者皆會選 1 人，選 2 人西式，3 人中式
$\Rightarrow C_1^3\times C_2^2\times C_3^4=12$。
(Ⅱ) 兩者皆會選 2 人，1 西 3 中或 2 中 2 西
$\Rightarrow C_2^3\times(C_1^2\times C_3^4+C_2^2\times C_2^4)=42$。
(Ⅲ) 兩者皆會選 3 人，剩餘 6 人任意選 3 人
$\Rightarrow C_3^3\times C_3^6=20$。
由(Ⅰ)+(Ⅱ)+(Ⅲ)=74，共 74 種。

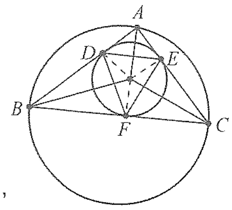
14. 依題意 $a+b=\sqrt{n}$，因為 a 為正整數，所以 $a\geq 1$，
由 $a^3+b^3=18ab=(a+b)^3-3ab(a+b)$，
利用 $b=\sqrt{n}-a$ 代入上式，
可得 $(\sqrt{n})^3-3a(\sqrt{n}-a)(\sqrt{n})=18a(\sqrt{n}-a)$，
整理得 $-3an+(n+3a^2)\sqrt{n}=-18a^2+18a\sqrt{n}$，
$\begin{cases}-3an=-18a^2\\ n+3a^2=18a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=6a\\ a=4\end{cases}\Rightarrow n=24$。

15. 如圖，虛線為摺痕 L。



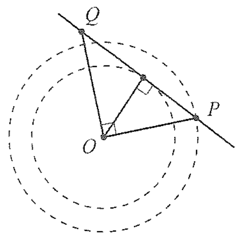
$\overline{AB}$ 中點為 $M(1,3)$ 且 $m_{AB}=m_{CD}=-3$
因為 $L\perp\overline{AB}$，所以 $L：x-3y+8=0$，
又 $\overleftrightarrow{CD}$：$3x+y-21=0$，解 $\begin{cases}x-3y+8=0\\ 3x+y-21=0\end{cases}$，
得 $N(\frac{11}{2},\frac{9}{2})$ 且 N 為 $\overline{CD}$ 中點，故 $D(6,3)$，
即 $a=6$，$b=3$，所求 $a+b=9$。

16. 設 $\triangle ABC$ 三邊為 a，b，c，
外接圓半徑為 $R=10$，內切圓半徑為 $r=4$，
$\triangle ABC=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}(a+b+c)r$，
$\triangle DEF=\frac{1}{2}r^2\sin(180°-A)+\frac{1}{2}r^2\sin(180°-B)$
$+\frac{1}{2}r^2\sin(180°-C)$



$=\frac{1}{2}r^2(\sin A+\sin B+\sin C)$，
$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\frac{\frac{1}{2}r^2(\sin A+\sin B+\sin C)}{\frac{1}{2}(a+b+c)r}$，
由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，
$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\frac{\frac{1}{2}r^2(\sin A+\sin B+\sin C)}{\frac{1}{2}\times 2R\times(\sin A+\sin B+\sin C)r}=\frac{r}{2R}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$。

17. 自直角之頂點做一圓，
使其與直角三角形有三個交點，
作圖如右，符合題意之最小圓，
恰為與斜邊相切時，
故 $k=r^2=(d(O,L))^2$
$=(\frac{3\times 0+4\times 0-30}{\sqrt{3^2+4^2}})^2$
$=36$。



（$r<6$，僅交 $\overline{OP}$，$\overline{OQ}$ 最多二交點）

第貳部分、混合題或非選擇題

18. 為了過關，合理的鑰匙分配為兩個箱子各 1 把金鑰匙，
故開門機率為 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，
故選(3)。

19. 依題意過關機率為 $\frac{2}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$，
不過關的機率為 $1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$，
此關卡之獎金期望值為 $\frac{2}{9}\times 36+\frac{7}{9}\times 18=22$ 萬元。

20. 設其中一個箱子有 a 把金鑰匙，另一個箱子有 b 把金鑰匙，
則 $a+b=2n$，開門的機率為 $\frac{a}{2n}\times\frac{b}{2n}=\frac{ab}{4n^2}$，
由算幾不等式知 $\frac{\frac{a}{2n}+\frac{b}{2n}}{2}\geq\sqrt{\frac{a}{2n}\times\frac{b}{2n}}$
$\Rightarrow\frac{1}{2}\geq\sqrt{\frac{ab}{4n^2}}$ 平方得 $\frac{1}{4}\geq\frac{ab}{4n^2}$，
當兩個箱子各分配 n 把金鑰匙時，各 n 把銀鑰匙，
過關機率的最大值為 $\frac{1}{4}$。