全國公私立高級中學113學年度學科能力測驗第二次聯合模擬考試

數學考科解析

考試日期：113 年 9 月 5~6 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13-1	13-2	13-3
5	4	3	1	1	3	245	25	24	124	12	24	1	6	0
14-1	14-2	15-1	16-1	16-2	17-1	17-2	18	19	20					
2	7	6	1	1	2	8	2							

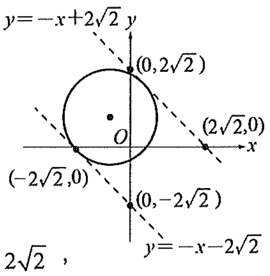
第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. 設 x 為此五數中的其中一數，且公差為 d，
則 $x-5=d$ 或 $2d$ 或 $3d$ 或 $4d$，且 d 為正整數，
又 $4d\le 50-5$，即 $d\le 11.25$。
(1) ×：$24-5=19\Rightarrow d=19$（不合）。
(2) ×：$28-5=23\Rightarrow d=23$（不合）。
(3) ×：$31-5=26\Rightarrow d=26$ 或 13（皆不合）。
(4) ×：$40-5=35\Rightarrow d=35$（不合）。
(5) ○：$49-5=44\Rightarrow d=44$ 或 22 或 11（22 與 44 不合）。
故選(5)。

2. 因為 $\overline{AB}$ 為圓的直徑，所以$\angle ACB=90°$
$\Rightarrow m_{AC}\times m_{BC}=-1$，即$\dfrac{2}{a}\times\dfrac{-3}{2}=-1$，得 $a=3$，
所以圓心坐標為 $\overline{AB}$ 中點 $(\dfrac{7}{2},1)$，
故選(4)。

3. 因直線通過 $(k,0)$ 與 $(0,k)$，
若 $k\ne 0$，則斜率$=\dfrac{0-k}{k-0}=-1$，
設直線方程式為 $y=-x+k$，
即 $x+y-k=0$，且圓 C 的方程式
為 $(x+1)^2+(y-1)^2=4$，
因為直線與圓 C 交於相異兩點
$\Rightarrow \dfrac{|-1+1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}<2\Rightarrow -2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$，
所以$-2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$ 或$-\sqrt{8}<k<\sqrt{8}$，
故選(3)。



4. 設藍色球有 x 顆
$\Rightarrow$ 取出的四顆球恰有兩顆紅色球的機率為$\dfrac{C_2^8C_2^{x+4}}{C_4^{x+12}}$，
取出的四顆球恰有三顆紅色球的機率為$\dfrac{C_3^8C_1^{x+4}}{C_4^{x+12}}$，
所以 $C_2^8C_2^{x+4}=C_3^8C_1^{x+4}$，即 $(x+4)(x-1)=0$，解得 $x=1$，
故選(1)。

5. 設 $\overline{CD}=x$，在$\triangle ABD$ 中，
因為 $\overline{AB}=\overline{AD}$ 且$\angle BAD=60°$，所以$\triangle ABD$ 為正三角形，
在$\triangle ACD$ 中，因為$\angle ADC=180°-60°=120°$，
由餘弦定理，可知 $13^2=7^2+x^2-2\cdot 7\cdot x\cdot\cos 120°$，
即 $x^2+7x-120=0$，解得 $x=8$ 或-15，
故選(1)。

6. 令 $(n^2-n)x^2-(2n-1)x+1=0$，
則 $(nx-1)[(n-1)x-1]=0$
$\Rightarrow x=\dfrac{1}{n}$ 或$\dfrac{1}{n-1}\Rightarrow \overline{P_nQ_n}=|\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n-1}|=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$，
所以 $\overline{P_2Q_2}+\overline{P_3Q_3}+\cdots+\overline{P_{2024}Q_{2024}}$
$=(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+\cdots+(\dfrac{1}{2023}-\dfrac{1}{2024})$
$=1-\dfrac{1}{2024}=\dfrac{2023}{2024}$，
故選(3)。

二、多選題

7. 設實驗(一)所得的二維數據為 (X_i,Y_i)，
實驗(二)所得的二維數據為 (U_i,V_i)，
則 $U_i=2X_i$，$V_i=20-Y_i$，$i=1,2,3,4,5$
$\Rightarrow\begin{cases}\mu_U=2\mu_X，\sigma_U=2\sigma_X\\ \mu_V=20-\mu_Y，\sigma_V=\sigma_Y\end{cases}$
所以 $r_2=r(U_i,V_i)=r(2X_i,20-Y_i)=-r(X_i,Y_i)=-r_1$
$\Rightarrow r_1+r_2=0$，
$m_2=r_2\cdot\dfrac{\sigma_V}{\sigma_U}=-r_1\cdot\dfrac{\sigma_Y}{2\sigma_X}=-\dfrac{1}{2}r_1\cdot\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}=-\dfrac{1}{2}m_1$
$\Rightarrow m_1=-2m_2$，
另由表中的數據可知，$r_1<0$，所以 $r_2=-r_1>0$
$\Rightarrow m_1<0$，$m_2>0$，因此 $m_1<m_2$，且 $m_1+2m_2=0$，$r_1m_2<0$，
故選(2)(4)(5)。

8. $\begin{cases}a^{\frac{c}{2}}=b^c\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}\\ 10^{a+1}=100\times 1000^c\cdots\cdots\text{②}\\ a+b+c=28\cdots\cdots\cdots\cdots\text{③}\end{cases}$
由①$\Rightarrow(a^{\frac{c}{2}})^2=(b^c)^2\Rightarrow a^c=b^{2c}=(b^2)^c$，
所以 $a=b^2\cdots\cdots$④，
由②$\Rightarrow 10^{a+1}=10^2\times(10^3)^c\Rightarrow 10^{a+1}=10^{3c+2}$
$\Rightarrow a+1=3c+2\Rightarrow c=\dfrac{a-1}{3}=\dfrac{b^2-1}{3}\cdots\cdots$⑤，
由④⑤代回③$\Rightarrow b^2+b+\dfrac{b^2-1}{3}=28$
$\Rightarrow 4b^2+3b-85=0\Rightarrow(4b-17)(b+5)=0$
$\Rightarrow b=\dfrac{17}{4}$ 或-5，
因為 b 為整數，所以 $b=-5$，
$\Rightarrow a=(-5)^2=25$，$c=\dfrac{25-1}{3}=8$，
所以 $abc<0$，$a-3b=5c$，
故選(2)(5)。

9. (1) ×：因 $f(x)=x(x-1)(x-2)+x+1$
$=x^3-3x^2+3x+1=(x-1)^3+2$，
而 $y=f(x)-2=(x-1)^3$ 與 x 軸恰交於一點 $(1,0)$。
(2) ○：由(1)可知，對稱中心為 $(1,2)$。
(3) ×：由連續使用綜合除法可知
$y=f(x)=(x-2)^3+3(x-2)^2+3(x-2)+3$
所以，在 $x=2$ 附近的一次近似為
$y=3(x-2)+3=3x-3$。

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & -3 & +3 & +1 & 2\\
 & +2 & -2 & +2 & \\
\hline
1 & -1 & +1 & +3 & \\
 & +2 & +2 & & \\
\hline
1 & +1 & +3 & & \\
 & +2 & & & \\
\hline
\boxed{1} & +3 & & &
\end{array}$$

(4) ○：因 $f(\sqrt{2})=(\sqrt{2}-1)^3+2$

$=2\sqrt{2}-3\times2\times1+3\times\sqrt{2}\times1-1+2$

$=5\sqrt{2}-5$，

由 $1.4<\sqrt{2}<1.5$，可知 $2<5\sqrt{2}-5<2.5$，

所以 $f(\sqrt{2})$ 的小數部分為 $5\sqrt{2}-5-2=5\sqrt{2}-7$。

(5) ×：$f(x)-f(x+1)>0$

$\Rightarrow(x-1)^3+2-[(x+1-1)^3+2]>0$

$\Rightarrow(x-1)^3-x^3>0$

$\Rightarrow x^3-3x^2+3x-1-x^3>0$

$\Rightarrow 3x^2-3x+1<0$，

因 $(-3)^2-4\times3\times1<0$ 且 $3>0$，

所以 $3x^2-3x+1$ 恆為正數，

即 $3x^2-3x+1<0$ 之解不存在。

故選(2)(4)。

10. 因為 $f(x)$ 的對稱中心為 $\overline{AB}$ 的中點 $(1,3)$，

所以設 $f(x)=a(x-1)^3+p(x-1)+3$，

又 $f(x)$ 在 $x=1$ 的一次近似為 $y=p(x-1)+3$，所以 $p=2$，

把 C 點代入 $f(x)$，得 $f(4)=27a+6+3=-18$，解得 $a=-1$

$\Rightarrow f(x)=-(x-1)^3+2(x-1)+3=-x^3+3x^2-x+2$，

故選(1)(2)(4)。

11. (1) ○：$\dfrac{C_3^6C_3^3}{2!}=10$ 種。

(2) ○：兩種情況下，其餘 4 人的分法皆相同。

(3) ×：因為甲與乙同一組時，僅需由其餘 4 人選一人為其組員，所以甲與乙同一組的方法數有 4 種。

(4) ×：$\dfrac{C_2^6C_2^4C_2^2}{3!}=15$ 種。

(5) ×：若兩者相同，則總分法數必須為偶數。

故選(1)(2)。

12. 由邊界的斜率大小知 $\overleftrightarrow{AB}$：$x+by-9=0$，

$\overleftrightarrow{BC}$：$2x-3y+a=0$，$\overleftrightarrow{AC}$：$7x-3y+c=0$

把 B、C 分別代入，得 $a=-8$，$b=1$，$c=-13$

$\Rightarrow A$ 點坐標為 $(4,5)$，

又 $x=4$ 與直線 BC 的交點為 $(4,0)$，

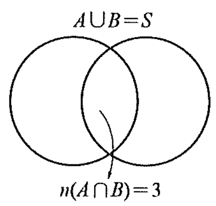
所以△ABC 的面積為 $\dfrac{1}{2}\times(5-0)\times(7-1)=15$，

故選(2)(4)。

三、選填題

13. 因 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，而且 $A\cup B=S$，$n(A\cap B)=3$，

所以共有 $C_3^6\times2^3=160$ 種。



14. 因為 1 分鐘後兩質點分別走 180° 與 360°，

所以在 10 秒時，兩質點分別走 30° 與 60°

$\Rightarrow$ 兩質點分別位於 $(2\cos(-60°),2\sin(-60°))$ 與 $(4\cos60°,4\sin60°)$，

故兩質點的距離為 $\sqrt{(2-1)^2+(2\sqrt{3}-(-\sqrt{3}))^2}=2\sqrt{7}$。

15. 因為輝達每一年的增長速率為 $1000^{\frac{1}{8}}$ 倍，

摩爾定律每一年的增長速率為 $2^{\frac{1}{1.5}}=2^{\frac{2}{3}}$ 倍，

所以 24 年後，輝達為摩爾的

$(\dfrac{1000^{\frac{1}{8}}}{2^{\frac{2}{3}}})^{24}=\dfrac{1000^3}{2^{16}}=\dfrac{10^9}{2^{10}\times2^6}\approx\dfrac{1000000}{64}=5^6$，

故 $n=6$。

16. 由題目條件知，$f(1)=0$，即 $-2+11-18+a=0$，得 $a=9$，

$\Rightarrow f(x)=-(2x^3-11x^2+18x-9)=-(x-1)(2x^2-9x+9)$

$=-(x-1)(2x-3)(x-3)$，

所以 $f(\dfrac{x}{2})=0$，即 $-(\dfrac{x}{2}-1)(x-3)(\dfrac{x}{2}-3)=0$，

解得 $x=2$ 或 3 或 6，

故方程式 $f(\dfrac{x}{2})=0$ 的所有實根的和為 11。

17. 因為 $f(x)$ 除以 $2x-1$ 的餘式為 $f(\dfrac{1}{2})$，

而 $f(x)$ 除以 $x+2$ 的餘式為 $f(-2)$，

$3f(x)$ 除以 $2(x+2)$ 的餘式為 $3f(-2)$，

由題意可知 $f(-2)+3f(-2)=0\Rightarrow f(-2)=0$，

令 $f(x)=(2x^2+3x-2)g(x)+(ax+b)$

$=(2x-1)(x+2)g(x)+(ax+b)$，

由 $\begin{cases}f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}a+b=10\\ f(-2)=-2a+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\ b=8\end{cases}$，

所以 $5a+b=20+8=28$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. 設 $\langle a_n\rangle$ 的公差為 d，

所以 $a_5=a_2+3d$，即 $-1=5+3d$，

所以 $d=-2$，

故選(2)。

19. 當 $n\ge2$ 時，

$b_n=S_n-S_{n-1}=(2n^2-3n)-[2(n-1)^2-3(n-1)]$

$=4n-5$，(2 分)

又 $b_1=S_1=2-3=-1$，(2 分)

因為 $4\times1-5=-1$ (1 分)

$\Rightarrow b_n=4n-5$，對所有的正整數 n。(1 分)

20. ＜法一＞

因為 $a_1=a_2-d=5-(-2)=7$，所以 $a_n=9-2n$，(2 分)

設 1，2，3，…，7 的標準差為 σ

$\Rightarrow\sigma_1=|-2|\sigma=2\sigma$ (1 分)，$\sigma_2=|4|\sigma=4\sigma$，(1 分)

故 $\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}=\dfrac{2\sigma}{4\sigma}=\dfrac{1}{2}$。(2 分)

＜法二＞

$\langle a_n\rangle$ 的前 7 項為 7，5，3，1，-1，-3，-5

$\Rightarrow$ 平均數 $\mu_1=a_4=1$，

標準差 $\sigma_1=\sqrt{\dfrac{6^2+4^2+2^2+0^2+(-2)^2+(-4)^2+(-6)^2}{7}}$

$=4$。(2 分)

$\langle b_n\rangle$ 的前 7 項為 -1，3，7，11，15，19，23

$\Rightarrow$ 平均數 $\mu_2=b_4=11$，

標準差 $\sigma_2=\sqrt{\dfrac{(-12)^2+(-8)^2+(-4)^2+0^2+4^2+8^2+12^2}{7}}$

$=8$，(2 分)

故 $\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}=\dfrac{1}{2}$。(2 分)