數學考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(2)	(4)	(2)	(5)	(1)	(2)	(1)(4)(5)
8.	9.	10.	11.	12.		
(1)(3)(4)(5)	(1)(3)	(1)(2)(5)	(1)(2)	(2)(4)		

(1)(3)(5)　(1)(5)

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (2)

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：基本的指數與常用對數運算

解析：設噴射機起飛時所產生的聲音強度為 I (W / m^2)

則 $100=10\log\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right)\Rightarrow 10=\log\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{I}{10^{-12}}=10^{10}\Rightarrow I=10^{10}\times 10^{-12}=10^{-2}=0.01$

故選(2)。

2. (4)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：餘式定理、多項式的運算與應用

解析：由餘式定理可知 $f(1)=2$，

且 $a=\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}$，$b=\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$，

則 $a+b=f(1)=2$

故選(4)。

3. (2)

出處：第二冊〈二維數據分析〉

目標：相關係數、最適直線的斜率

解析：因為累積租借次數與時間之相關係數接近 1，

所以樣本點資料幾乎散布於同一條直線附近

假設在 14 時 33 分時，累積租借次數為 y 次，則

$\dfrac{y-2512}{33-32}=\dfrac{2512-2135}{32-22}\Rightarrow y=2549.7\approx 2550$

故選(2)。

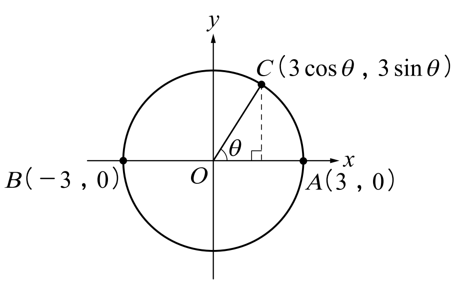
4. (5)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：廣義角、圓上的動點

解析：點 C 在以圓心為 $(0\,,0)$，半徑為 3 的圓上

如下圖



故△ABC 的面積為 $\dfrac{1}{2}\times 6\times|3\sin\theta|=7$

$\Rightarrow \sin\theta=\pm\dfrac{7}{9}$

在 $0\le\theta\le 2\pi$ 中，共有 4 個 θ 滿足 $\sin\theta=\pm\dfrac{7}{9}$

故選(5)。

5. (1)

出處：第一冊〈數與式〉

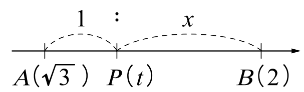
目標：基本的數與式化簡、雙重根號化簡、分點公式

解析：$f(x)=\sqrt{\dfrac{3x^2+4\sqrt{3}x+4}{x^2+2x+1}}$

$=\sqrt{\dfrac{(\sqrt{3}x+2)^2}{(x+1)^2}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}x+2}{x+1}$

考慮數線上三點 $A(\sqrt{3})$、$B(2)$ 與 $P(t)$



由分點公式知，所求數線上 $P(t)$ 的位置即為 $f(x)$ 的函數值

當 x 值愈小時，P 點往右方移動，則 t 值愈大

因此選項中當 $x=\dfrac{1}{2}$ 時，$f(x)$ 的函數值為最大

故選(1)。

6. (2)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：計數原理、同異物排列、古典機率

解析：在 1^2，2^2，3^2，4^2，5^2，6^2 中，可被 3 整除的有 3^2 與 6^2 兩個數字，

被 3 除餘 1 的有 1^2，2^2，4^2 與 5^2 等四個數字

則 $a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2+a_5{}^2$ 為 3 的倍數有以下兩種情形，分別討論如下：

① 第一種為 $a_i{}^2$，$i=1$，2，3，4，5 皆可被 3 整除，共有 $2^5=32$ 種

② 第二種為 $a_i{}^2$，$i=1$，2，3，4，5 中有兩個可被 3 整除，三個為被 3 除餘 1

故可先考慮□□○○○排列後再放入數字

共有 $\dfrac{5!}{2!3!}\times 2^2\times 4^3=2560$ 種

由①、②可得共 2592 種，所求機率為 $\dfrac{2592}{6^5}=\dfrac{1}{3}$

故選(2)。

二、多選題

7. (1)(4)(5)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：直線方程式及其圖形

解析：三條相異直線要將平面分割成 6 個區域有以下兩種情形，分別討論如下：

① 三條直線中有兩條互相平行

∵直線 L_1、L_2、L_3 的斜率分別為

$m_1=-2$、$m_2=1$、$m_3=-\dfrac{2}{m}$

當 $L_1 // L_3$ 時，$m_1=m_3\Rightarrow -2=-\dfrac{2}{m}\Rightarrow m=1$

當 $L_2 // L_3$ 時，$m_2=m_3\Rightarrow 1=-\dfrac{2}{m}\Rightarrow m=-2$

② 三直線恰交於一點

$\begin{cases}2x+y=5\\ x-y=-2\end{cases}\Rightarrow x=1，y=3$

代入 $2x+my=8$ 得 $m=2$

故選(1)(4)(5)。

8. (1)(3)(4)(5)

出處：第二冊〈數列與級數〉、第二冊〈三角比〉

目標：等差、等比數列的性質、數列的遞迴式、直角三角形的斜角關係

解析：(1) ○：$\theta_2=\dfrac{1}{2}(180^\circ-\theta_1)\Rightarrow\theta_1+2\theta_2=180^\circ$

(2) ╳(3) ○：由(1)可觀察出 $\theta_2=90^\circ-\dfrac{\theta_1}{2}$

以此類推可得〈θ_n〉的遞迴式為

$\begin{cases}\theta_1=\theta_1\\ \theta_n=90^\circ-\dfrac{\theta_{n-1}}{2}，n\ge 2\end{cases}$

(4) ○：承(3)

$\because\theta_{n+1}=90^\circ-\dfrac{\theta_n}{2}$，$n\ge 1$

故 $\sin\theta_{n+1}=\sin\left(90^\circ-\dfrac{\theta_n}{2}\right)=\cos\dfrac{\theta_n}{2}$

(5) ○：當 $\theta_1=60^\circ$ 時，$\theta_2=90^\circ-\dfrac{1}{2}\cdot60^\circ=60^\circ$，

$\theta_3=90^\circ-\dfrac{1}{2}\cdot60^\circ=60^\circ$，……，以此類推

故〈θ_n〉是公差為 0 的等差數列，也是公比為 1 的等比數列

故選(1)(3)(4)(5)。

9. (1)(3)或(1)(3)(5)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：全距、標準差、數據標準化、最適直線的性質

解析：(1) ○

(2) ╳：$\mu_{甲'}=0.05\cdot\mu_{甲}+4=0.05\cdot54+4=6.7$

$\mu_{乙'}=0.08\cdot\mu_{乙}-1=0.08\cdot65-1=4.2$

$\therefore\mu_{甲'}>\mu_{乙'}$

(3) ○：設甲班的英文成績標準差為 $\sigma_{甲'}$

乙班的英文成績標準差為 $\sigma_{乙'}$

$\because\begin{cases}0.05=0.6\cdot\dfrac{\sigma_{甲'}}{12}\\ 0.08=0.3\cdot\dfrac{\sigma_{乙'}}{15}\end{cases}\Rightarrow\sigma_{甲'}=1，\sigma_{乙'}=4$

$\therefore\sigma_{甲'}<\sigma_{乙'}$

(4) ╳：題目條件不足，無法判斷

(5) ╳：由(2)、(3)可得 $\mu_{甲'}=6.7$，$\sigma_{甲'}=1$

將數據標準化如下

數學：$\dfrac{52-54}{12}=-\dfrac{1}{6}\approx-0.2$，

英文：$\dfrac{6-6.7}{1}=-0.7$

$\because -0.2>-0.7$

故其數學的表現比英文的表現好

故選(1)(3)。

10. (1)(2)(5)或(1)(5)

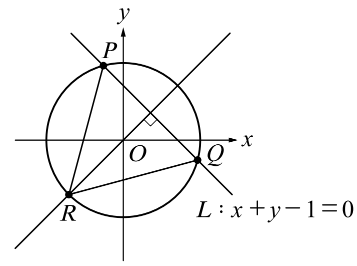
出處：第一冊〈直線與圓〉、第二冊〈三角比〉

目標：圓與直線的關係、廣義角與極坐標

解析：(1) ○：$\because\triangle PQR$ 為正三角形

$\therefore R$ 點會在 $\overline{PQ}$ 的中垂線上

如下圖



(2) ○：$\because R$ 點落在 $\overline{PQ}$ 的中垂線上

令中垂線 L'：$x-y=k$

$\because L'$ 必過原點 $O(0,0)$

代入 L' 可得 $x-y=0$

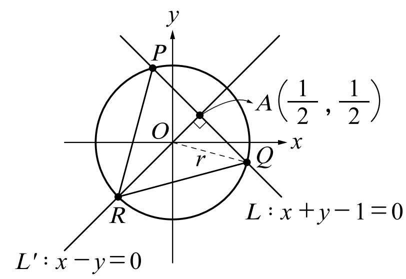
可推得 $\theta=45^\circ$ 或 225°

當 $\theta=45^\circ$ 時，$\triangle PQR$ 不為正三角形

故取 $\theta=225^\circ$

(3) ╳：$\because$直線 L 與 L' 的交點為 $A\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

$\therefore\overline{OA}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$



在$\triangle AQO$ 中，$\sin30^\circ=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{r}\Rightarrow r=\sqrt{2}$

故圓 C 的方程式為 $x^2+y^2=2$

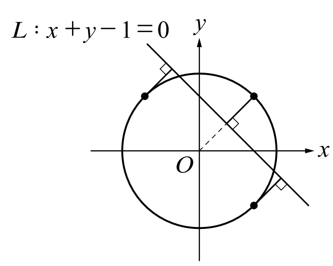
(4) ╳：$\because R$ 點在第三象限，而直線 $x+y-2=0$ 不通過第三象限

$\therefore R$ 點不在直線 $x+y-2=0$ 上

(5) ○：$d(O,L)=\overline{OA}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{r}{2}$

如下圖



$\therefore$恰有三點與 L 的距離皆為 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

故選(1)(2)(5)。

11. (1)(2)

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：能應用等比級數於解決生活情境題

解析：(1) ○：共經過 5 分鐘，$5=1+2+2$

得其位置在點 $(1-2\ ,\ 2)=(-1\ ,\ 2)$

(2) ○：共經過 31 分鐘，故共行走了 31 公尺

(3) ╳：共經過 65 分鐘，$65=1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2$

此時掃地機器人位置的 y 坐標為

$2-2^3+2^5=26>0$

$\therefore$早上 9 點 5 分時，掃地機器人的位置在 x 軸的上方

(4) ╳：$\because$每分鐘走 1 公尺

且 $1+2+2^2+\cdots\cdots+2^8=2^9-1=511$

$\therefore$依序走 1，2，2^2，2^3，……，2^7，2^8 公尺

共轉向 8 次

(5) ╳：承(4)，考慮轉向後，

x 坐標為 $1-2^2+2^4-2^6+2^8=205$，

y 坐標為 $2-2^3+2^5-2^7=-102$

$\therefore$此時它的位置在點 $(205\ ,-102)$

故選(1)(2)。

12. (2)(4)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：了解三次多項式函數的圖形之性質與不等式

解析：(1) ╳：只有 $a=0$ 時，$y=f(x)$ 的圖形才會對稱於原點 $(0\ ,\ 0)$

(2) ○：$f(x)=x(x^2+ax+4)$，當 x^2+ax+4 的判別式 $a^2-16>0$ 時，

即 $a>4$ 或 $a<-4$ 時，$y=f(x)$ 的圖形與 x 軸有三個交點

(3) ╳：承(2)，當 x^2+ax+4 的判別式 $a^2-16<0$ 時

即 $-4<a<4$ 時，$y=f(x)$ 的圖形與 x 軸只有一個交點

(4) ○：$\because(3\ ,\ 0)$ 為對稱中心，故可得

$g(x)=x^3+ax^2+bx-15$

$=(x-3)^3+p(x-3)+0$

$=x^3-9x^2+(27+p)x+(-27-3p)$

兩邊比較係數可得

$-15=-27-3p\Rightarrow p=-4$

$\therefore g(x)=(x-3)^3-4(x-3)$

故 $y=g(x)$ 在 $x=3$ 附近的一次近似為

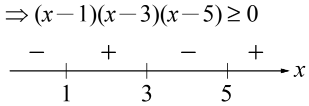
$y=-4(x-3)=-4x+12$

(5) ╳：承(4)，$g(x)=(x-3)^3-4(x-3)\geq 0$

$\Rightarrow(x-3)\left[(x-3)^2-4\right]\geq 0$

$\Rightarrow(x-3)(x^2-6x+5)\geq 0$

$\Rightarrow(x-1)(x-3)(x-5)\geq 0$



可得 $1\leq x\leq 3$ 或 $x\geq 5$

故滿足 $g(x)\geq 0$ 之最小的整數解為 1

故選(2)(4)。

三、選填題

13. 11

出處：第一冊〈數與式〉

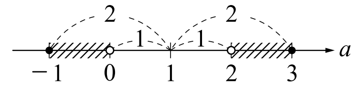
目標：解含絕對值的一次不等式、含絕對值的一次方程式的幾何意義、分點公式

解析：$\because 1<|a-1|\leq 2$

$\therefore 1<a-1\leq 2$ 或 $-2\leq a-1<-1$，

即 $2<a\leq 3$ 或 $-1\leq a<0$

〈另解〉用圖解法



則 $2<a\leq 3$ 或 $-1\leq a<0$

設數線上 $A(a)$、$B(7)$、$C(x)$，

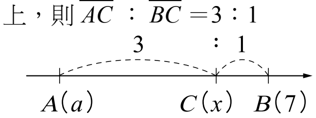
則 $|x-a|=3|x-7|\Rightarrow\overline{AC}:\overline{BC}=3:1$

$\because 2<a\leq 3$ 或 $-1\leq a<0$

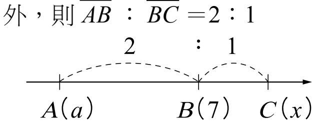
$\therefore$可推得 $A(a)$ 必在 $B(7)$ 之左側

有以下兩種情形，分別討論如下：

若 C 在 $\overline{AB}$ 上，則 $\overline{AC}:\overline{BC}=3:1$



若 C 在 $\overline{AB}$ 外，則 $\overline{AB}:\overline{BC}=2:1$



$\because C$ 在 $\overline{AB}$ 之間或在 B 點右側

$\therefore$當 $\overline{AB}$ 最長且 C 點在 B 點右側時，x 的值最大

即 $a=-1$ 時，$x-(-1)=3(x-7)\Rightarrow x=11$

故 x 的最大值為 11。

14. 65

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：了解如何計算期望值

解析：要求期望值最小，表示已經有 5 個 100 元的洞被戳中，剩下 3 個 100 元以及 1 個 1000 元的洞

獎金	1000	100
機率	$\frac{C^1_1}{C^{20}_1}$	$\frac{C^3_1}{C^{20}_1}$

故所獲得獎金期望值的最小值為

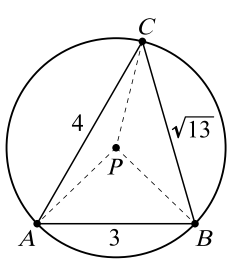
$1000\times\frac{C^1_1}{C^{20}_1}+100\times\frac{C^3_1}{C^{20}_1}=65$ 元。

15. $\frac{\sqrt{39}}{3}$

出處：第二冊〈三角比〉

目標：正、餘弦定理的應用

解析：由題意知此距離即為$\triangle ABC$ 外接圓的半徑 R



由餘弦定理知

$\overline{BC}^2=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2-2\times\overline{AC}\times\overline{AB}\times\cos A$

$\Rightarrow(\sqrt{13})^2=4^2+3^2-2\times4\times3\times\cos A$

$\Rightarrow 13=16+9-24\cos A$

$\Rightarrow \cos A=\dfrac{1}{2}$

故 $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

再利用正弦定理可得

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R\Rightarrow R=\dfrac{\sqrt{39}}{3}$

故所求距離為 $\dfrac{\sqrt{39}}{3}$ 。

16. 240

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：不相鄰物排列、應用取捨原理於生活情境題

解析：令 A：1、7 接連出現所成的集合，

B：0、2 接連出現所成的集合，

C：6、9 接連出現所成的集合

所求為

任意排 $-n(A\cup B\cup C)$

$=6!-(C_1^3\times5!\times2!-C_2^3\times4!\times2!\times2!+C_3^3\times3!\times2!\times2!\times2!)$

$=720-(720-288+48)$

$=240$

故共有 240 種密碼設置法。

17. $2x^2-3x-2$

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：簡單多項式函數、除法原理

解析：$\because f(x)$ 與 $g(x)$ 皆為實係數二次多項式

且首項係數都是 1

故可令 $f(x)-g(x)=ax+b$，其中 a、b 為實數

$\Rightarrow f(x)=g(x)+ax+b$ …………(＊)

可得

$(f(x))^2=(g(x)+ax+b)^2$

$=g(x)[g(x)+2(ax+b)]+(ax+b)^2$

又 $(f(x))^2$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $2x+1$

則 $(ax+b)^2=a^2g(x)+2x+1$ ……………①

另一方面 $(g(x))^2=(f(x)-ax-b)^2$

$=f(x)[f(x)-2(ax+b)]+(ax+b)^2$

又 $(g(x))^2$ 除以 $f(x)$ 的餘式為 $x+1$，

則 $(ax+b)^2=a^2f(x)+x+1$………………②

由①、②可得 $a^2f(x)+x+1=a^2g(x)+2x+1$

$\Rightarrow f(x)=g(x)+\dfrac{1}{a^2}x$

與(＊)比較可得

$f(x)=g(x)+ax+b=g(x)+\dfrac{1}{a^2}x\Rightarrow a=1，b=0$

代回①與②得

$f(x)=x^2-x-1，g(x)=x^2-2x-1$

故 $f(x)+g(x)=2x^2-3x-2$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. (3)或(5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：二次方程式的判別式

解析：$\because$ 方程式有兩實數解 α 與 β

且滿足 $-1\le\alpha\le0$、$1\le\beta\le2$

可知 $x^2-ax+b=0$ 有兩相異實數解

$\therefore$ 判別式 $D=a^2-4b>0\Rightarrow\left(\dfrac{a}{2}\right)^2>b$

故選 (3)或(5)。

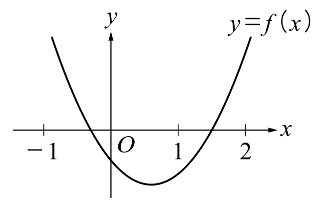
19. (1)(2)(3)(5)

出處：第一冊〈多項式函數〉、第一冊〈直線與圓〉

目標：簡單多項式函數及其圖形、二元一次不等式的應用問題

解析：由題意可知 $y=f(x)=x^2-ax+b$ 為一個開口向上的拋物線，並與 x 軸相交於相異兩點

如下示意圖



觀察圖形可得

$$\begin{cases}f(-1)\ge0\\f(0)\le0\\f(1)\le0\\f(2)\ge0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+a+b\ge0\\b\le0\\1-a+b\le0\\4-2a+b\ge0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b\ge-1\\b\le0\\a-b\ge1\\4-2a+b\ge0\end{cases}$$

而 $f(-2)=4+2a+b\ge0$

故選(1)(2)(3)(5)。

20. $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

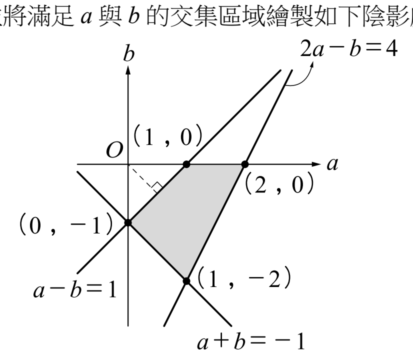
出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：兩點距離公式、二元一次不等式的應用問題

解析：承第 19 題

考慮聯立方程式 $\begin{cases}a+b\ge-1\\b\le0\\a-b\ge1\\2a-b\le4\end{cases}$

並將滿足 a 與 b 的交集區域繪製如下陰影處



由題意，a^2+b^2 的最小值可以想成在交集區域找一點 (a , b) 到原點 O 的最短距離之平方

由上頁圖可觀察出在 $a-b=1$ 上的點 $\left(\frac{1}{2} , -\frac{1}{2}\right)$ 與原點 O 的距離有最小值 $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore k=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$

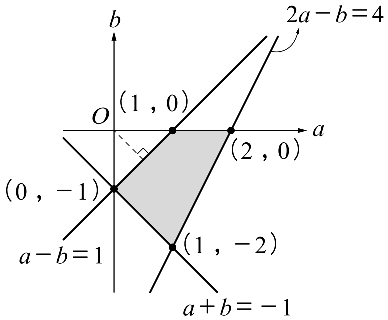
故序組 $(a，b，k)=\left(\frac{1}{2} , -\frac{1}{2} , \frac{1}{2}\right)$。

◎**評分原則**

承第 19 題

考慮聯立方程式 $\begin{cases} a+b\geq -1 \\ b\leq 0 \\ a-b\geq 1 \\ 2a-b\leq 4 \end{cases}$

並將滿足 a 與 b 的交集區域繪製如下陰影處



(2 分)

由題意，a^2+b^2 的最小值可以想成在交集區域找一點 (a , b) 到原點 O 的最短距離之平方　(1 分)

由上圖可觀察出在 $a-b=1$ 上的點 $\left(\frac{1}{2} , -\frac{1}{2}\right)$ 與原點 O 的距離有最小值 $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore k=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$

故序組 $(a，b，k)=\left(\frac{1}{2} , -\frac{1}{2} , \frac{1}{2}\right)$。　(2 分)