

北北基高級中等學校 113 學年度學測模擬考數學 A(113-E3)

第壹部分：選擇題(占 85 分)



一、單選題(占 30 分)

1. 在生態學上的研究指出島嶼的物種數量與島嶼面積有明顯的關聯性，物種數 S (單位：種)與島嶼面積 A (單位：平方公里)的關係式為 $\log S = \log c + z \log A$ ，其中 c 與 z 均為常數，且 $c > 0$ 。已知甲島嶼和乙島嶼的面積分別為 36000 平方公里與 450 平方公里，若常數 $z=0.25$ ，則甲島嶼的物種數除以乙島嶼的物種數最接近下列何者？
(1) 0.5 (2) 2 (3) 3 (4) 8 (5) 80
2. 動漫製作公司為了回饋長期支持的粉絲，打算舉辦動漫回饋祭的活動，只要參加活動的粉絲即可免費獲得某角色的公仔一隻。已知該角色公仔頭上的帽子、身上穿的披風、左手的手環、右手的手套、腰上的包包共五個配件，每個配件的顏色均有 16 種不同顏色可供選擇其中一種，且顏色可重複選擇。設該角色公仔的五個配件顏色共有 n 種不同的搭配情形，試問下列何者正確？ (1) $10 \leq n < 10^2$ (2) $10^4 \leq n < 10^5$ (3) $10^6 \leq n < 10^7$
(4) $10^9 \leq n < 10^{10}$ (5) $10^{11} \leq n < 10^{12}$
3. 設字集為所有實數 \mathbf{R} ，已知 $A = \{x \mid |3x - a| \leq 8\}$, $B = \{x \mid -3 \leq x \leq 8\}$ ，試問有多少個整數 a 使得 $A \subseteq B$ ？ (1) 17 個 (2) 18 個 (3) 19 個 (4) 20 個 (5) 21 個
4. 在銳角 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB} > \overline{AC} > \overline{BC}$ ，則 $\sin B$ 的最大範圍為下列何者？
(1) $0 < \sin B < \frac{1}{2}$ (2) $0 < \sin B < \frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\frac{1}{2} < \sin B < 1$ (4) $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin B < 1$ (5) $\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin B < 1$
5. 設三次函數 $f(x) = 3(x-2)^3 + a(x-2) + b$ ，已知 $y = f(x)$ 圖形的對稱中心位於第一象限，且將 $y = f(x)$ 的圖形做適當平移後會與 x 軸交於相異三點。試問 $y = f(x)$ 的圖形在對稱中心附近可能會近似下列哪一直線？ (1) $y = 2x + 3$ (2) $y = x - 4$ (3) $y = -x - 2$
(4) $y = -2x + 3$ (5) $y = -3x + 8$
6. 假設實數 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ 是一個公比為 r 的等比數列，其中 $a_1 > 0, r < -1$ 。試問從這 8 個數中隨機選出 2 個數的總和為負數的機率為下列何者？
(1) $\frac{3}{14}$ (2) $\frac{2}{7}$ (3) $\frac{5}{14}$ (4) $\frac{3}{7}$ (5) $\frac{4}{7}$

二、多選題(占 30 分)

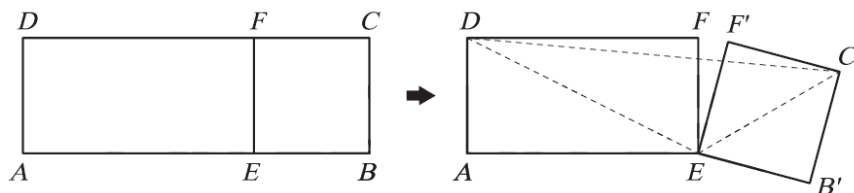
7. 設 $a = \log(\log 2024), b = \log(2024^2), c = (\log 2024)^2$ ，試選出正確的選項。
(1) $b > 6$ (2) $b < c$ (3) $a > b$ (4) $\log b = 2a$ (5) $10^a = \sqrt{c}$
8. 設 a, b, c 皆為實數，已知多項式 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx + c$ 除以 $x^3 + 1$ 的餘式為 $3x - 1$ ，且 $f(x)$ 除以 $x - 1$ 的餘式為 -2 ，試選出正確的選項。
(1) $f(x)$ 除以 $x + 1$ 的餘式為 2
(2) $f(x)$ 除以 $x^2 - x + 1$ 的餘式為 $3x - 1$ (3) $a + b + c = -3$ (4) $a < c$
(5) 不等式 $f(x) > 3x - 1$ 的解為 $x > -1$
9. 某公司七位員工原來月薪的平均數為 41000 元，標準差為 8000 元，而敏恩、慧志、亞丞為其中三位員工，其月薪分別為 53000 元、33000 元、29000 元。今年因為公司營運方式改變，老闆將七位員工的月薪以 $y = ax + b$ 的方式來調整，其中 $a > 0$ ，且 x, y 分別代表七位員工調整前後的月薪(單位：元)。已知調整後七位員工月薪的平均數為 42800 元，標

- 準差減少 1600 元，試選出正確的選項。(1) $a > 1$ (2) 慧志調整後的月薪為 36400 元 (3) 慧志與亞丞調整後的月薪差距比調整前的月薪差距大 (4) 該公司七位員工調整後的月薪高低排名與調整前相同 (5) 該公司七位員工調整後的月薪均比調整前的月薪多
10. 在坐標平面上，設 $\triangle ABC$ 的外心為 $M(a, b)$ ，其中兩頂點坐標為 $A(-10, -5), B(-14, 5)$ 。已知外心 M 到 x 軸、 y 軸的距離比為 2:1，試選出正確的選項。(1) $|a| = 2|b|$ (2) M 點必位於直線 $2x - 5y + 24 = 0$ 上 (3) M 點必位於直線 $2x - y = 0$ 上 (4) M 點不可能位於第四象限 (5) \overline{CM} 長的最小值為 $\sqrt{290}$
11. 某校數理資優班有 5 位同學參加校內數學競賽的培訓測驗，測驗內容分為筆試一與筆試二，亦程因為考試當天腸胃炎，所以只能參加補考。設 x, y 分別表示當天其餘 4 位同學筆試一與筆試二的分數，其中筆試一與筆試二的平均分數分別為 60 分與 40 分，筆試一的標準差為 $2\sqrt{5}$ 分， x 與 y 的相關係數為 $\frac{4}{5}$ ， y 對 x 的迴歸直線為 $L: y = \frac{2}{5}x + 16$ 。已知亦程筆試一與筆試二的補考成績分別為 60 分與 40 分，假設含亦程等 5 位同學筆試一與筆試二的分數分別為 x' 與 y' ，其平均分數分別為 $\mu_{x'}$ 與 $\mu_{y'}$ 、標準差分別為 $\sigma_{x'}$ 與 $\sigma_{y'}$ ，試選出正確的選項。(1) 除亦程以外的 4 位同學筆試二的標準差為 $\sqrt{5}$ 分 (2) $\mu_{x'} = 60$ (分) (3) $\sigma_{x'} = 2\sqrt{5}$ (分) (4) 含亦程等 5 位同學筆試一與筆試二的相關係數為 $\frac{2}{5}$ (5) y' 對 x' 的迴歸直線為 $y' = \frac{2}{5}x' + 16$
12. 設 I 為 $\triangle ABC$ 的內心，已知 $\overline{AB} = 3, \overline{BC} = 7, \overline{AC} = 8$ ，且直線 AI 與 $\triangle ABC$ 的外接圓 Γ 交於點 D ，試選出正確的選項 (1) $\cos \angle BAC = \frac{1}{3}$ (2) 圓 Γ 的半徑長為 $\frac{7}{\sqrt{3}}$ (3) 劣弧 \widehat{BC} 的弧長為 $\frac{7\sqrt{3}\pi}{9}$ (4) $\overline{BD} = \frac{7}{\sqrt{3}}$ (5) $\overline{AD} = \frac{11\sqrt{3}}{3}$

三、選填題(占 25 分)

13. 設遞迴數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_n = a_{n-1} + k, n \geq 2 \end{cases}$ ，其中 α 與 k 均為正數。若 $a_3 + 2a_5 = 60$ ，則 $\alpha \times k$ 的最大值為_____。

14. 在長方形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 6, \overline{AD} = 2$ ，且 E, F 分別位於 \overline{AB} 與 \overline{CD} 上，其中四邊形 $BCFE$ 為正方形。若將正方形 $BCFE$ 以 E 點為中心順時針旋轉 15° 後得到正方形 $B'C'F'E$ ，如下圖所示，則 $\triangle DEC'$ 的面積為_____。(化為最簡根式)



15. 當兩個整數除以同一個正整數 m ，若得相同餘數，則稱此二整數同餘於模 m 。今將所有的正整數中，除以 5 餘 4 的數，由小至大排列成一個數列 $\langle a_n \rangle$ ，即這些數均同餘於模 5。若將數列 $\langle a_n \rangle$ 中可被 2 整除的數，由小至大排列成一個數列 $\langle b_n \rangle$ ，則 $b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_{10}^2$ _____。

16. 連續投擲一公正骰子兩次，設出現的點數依序為 a, b ，在坐標平面上，將直線 $L: 3x + 4y = 0$ 向右平移 a 單位，再向上平移 b 單位後得直線 L' ，則直線 L' 與圓 $\Gamma: x^2 + y^2 = 25$ 交點個數的期望值為_____個。(化為最簡分數)

17. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A = 60^\circ$ ， D 在 \overline{AC} 上，且滿足 $\overline{AD}:\overline{CD} = 1:3$ 。若 $\triangle ABD$ 的外接圓直徑為 2，則 $\overline{AB} + \overline{AC}$ 的最大值為_____。(化為最簡根式)

第貳部分：混合題或非選擇題(占 15 分)

18-20 題為題組

卡帕利用假日到附近的國家公園健走，已知入口處位於公園的坐標地圖上 A 點，卡帕自 A 點出發沿著方向 $\vec{u} = (1, 3)$ 前進 $2\sqrt{10}$ 個單位長後，抵達位於 B 點的觀霧瀑布步道稍作休息，再從 B 點沿著方向 $\vec{v} = (2, -1)$ 前進 $k|\vec{v}|$ 個單位長後到達 C 點的榛山步道，其中 $k > 0$ ，試回答下列問題。

18. 試問 \overrightarrow{BA} 在 \overrightarrow{BC} 上的正射影長為下列何者？(單選題，3 分)

- (1) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (4) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ (5) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

19. 試求 $|\overrightarrow{AC}|$ 的最小值及此時的 k 值。(非選擇題，4 分)

20. 設卡帕自 C 點朝向 A 點前進的途中會經過 D 點，已知 $\overline{AD}:\overline{DC} = 2:1$ ，且 $1 \leq k \leq 5$ ，試求 $|\overrightarrow{BD}|$ 的最小值及此時的 k 值。(非選擇題，8 分)

參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$ 。

指對數值： $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 5 \approx 0.6990$ ， $\log 7 \approx 0.8451$ 。

RA3100 北北基高級中等學校 113 學年度學測模擬考數學 A(113-E3)

參考答案

選擇題：1. (3) 2. (3) 3. (2) 4. (4) 5. (5) 6. (5) 7. (1)(2)(5) 8. (2)(3)

9. (2)(4) 10. (2)(4) 11. (1)(2)(5) 12. (2)(4)(5)

選填題：13. 30 14. $2\sqrt{2} + \sqrt{6}$ 15. 32260 16. $\frac{37}{36}$ 17. $2\sqrt{21}$

混合題：18. (5) 19. 最小值 $\frac{14\sqrt{5}}{5}$ ，此時 $k = \frac{2}{5}$ 20. 最小值 $\frac{2\sqrt{17}}{3}$ ，此時 $k = 1$