數學 A 考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(3)	(3)	(2)	(4)	(5)	(5)	(1)(2)(5)
8.	9.	10.	11.	12.		
(2)(3)	(2)(4)	(2)(4)	(1)(2)(5)	(2)(4)(5)		

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (3)

出處：第三冊〈指數與對數函數〉

目標：常用對數的基本性質與常用對數值

解析：設甲島嶼和乙島嶼的物種數分別為 S_1 與 S_2

可知 $\begin{cases}\log S_1=\log c+0.25\log 36000\cdots\cdots①\\ \log S_2=\log c+0.25\log 450\cdots\cdots\cdots②\end{cases}$

①－②：$\log S_1-\log S_2=0.25(\log 36000-\log 450)$

$=0.25\log\dfrac{36000}{450}=0.25\log 80$

$\Rightarrow \log\dfrac{S_1}{S_2}=0.25\log 80=0.25(3\log 2+1)$

$\approx 0.25(3\times 0.301+1)=0.47575\approx\log 3$

$\Rightarrow \dfrac{S_1}{S_2}\approx 3$

故選(3)。

2. (3)

出處：第一冊〈指數、對數〉、第二冊〈排列組合與機率〉

目標：指數律、常用對數值與重複排列

解析：因為每個配件均有 16 種顏色可選

所以 $n=16^5=(2^4)^5=2^{20}\approx(10^{0.301})^{20}=10^{6.02}$

$\Rightarrow 10^6\le 10^{6.02}<10^7\Rightarrow 10^6\le n<10^7$

故選(3)。

3. (2)

出處：第一冊〈數與式〉、第二冊〈排列組合與機率〉

目標：絕對值不等式與集合的定義

解析：因為 $A\subseteq B$

又 $|3x-a|\le 8\Rightarrow -8\le 3x-a\le 8$

$\Rightarrow\dfrac{-8+a}{3}\le x\le\dfrac{8+a}{3}$

因此可得 $A=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{-8+a}{3}\le x\le\dfrac{8+a}{3}\right\}$

$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{8+a}{3}\le 8\\ \dfrac{-8+a}{3}\ge -3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\le 16\\ a\ge -1\end{cases}\Rightarrow -1\le a\le 16$

$\Rightarrow a=-1，0，\cdots\cdots，16，$

共有 18 個整數 a 使得 $A\subseteq B$

故選(2)。

4. (4)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：三角比的大小關係

解析：因為 $\overline{AB}>\overline{AC}>\overline{BC}$，且$\triangle ABC$ 為銳角三角形

所以 $0^\circ<\angle A<\angle B<\angle C<90^\circ$

$\Rightarrow\angle B+\angle B>\angle A+\angle B>90^\circ$

(因為 $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$，$\angle C<90^\circ$)

$\Rightarrow 45^\circ<\angle B<90^\circ$，又 $\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin 90^\circ=1$

因此可得 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\sin B<1$

故選(4)。

5. (5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：三次函數圖形的對稱中心與一次近似

解析：因為將 $y=f(x)$ 的圖形做適當平移後會與 x 軸交於相異三點

所以 $3\times a<0\Rightarrow a<0$

又圖形的對稱中心為 $(2,b)$，且位於第一象限，

因此可知 $b>0$

由 $f(x)=3(x-2)^3+a(x-2)+b$

可得 $y=f(x)$ 的圖形在對稱中心附近的一次近似為

$y=a(x-2)+b\Rightarrow y=ax+(-2a+b)$

(1)╳：若一次近似為 $y=2x+3$，則 $a=2>0$ (矛盾)

(2)╳：若一次近似為 $y=x-4$，則 $a=1>0$ (矛盾)

(3)╳：若一次近似為 $y=-x-2$，則 $\begin{cases}a=-1\\ -2a+b=-2\end{cases}$

$\Rightarrow b=-4<0$ (矛盾)

(4)╳：若一次近似為 $y=-2x+3$，則 $\begin{cases}a=-2\\ -2a+b=3\end{cases}$

$\Rightarrow b=-1<0$ (矛盾)

(5)○：若一次近似為 $y=-3x+8$，則 $\begin{cases}a=-3\\ -2a+b=8\end{cases}$

$\Rightarrow b=2$

故選(5)。

6. (5)

出處：第二冊〈數列與級數〉、第二冊〈排列組合與機率〉

目標：等比數列的一般項與古典機率

解析：因為 $a_1>0$，$r<-1$，所以 a_1，a_3，a_5，a_7 為正數，

a_2，a_4，a_6，a_8 為負數

且 $|a_1|<|a_2|<|a_3|<|a_4|<|a_5|<|a_6|<|a_7|<|a_8|$

選出 2 個數的總和為負數的情形如下：

①選出 2 個負數：方法數為 $C_2^4=6$

②選出 1 個正數與 1 個負數：

$$\underbrace{C_1^4}_{\substack{\text{選出 }a_1\text{ 且從}\\ a_2，a_4，a_6，a_8\\ \text{中選出一數}}}+\underbrace{C_1^3}_{\substack{\text{選出 }a_3\text{ 且從}\\ a_4，a_6，a_8\text{ 中}\\ \text{選出一數}}}+\underbrace{C_1^2}_{\substack{\text{選出 }a_5\text{ 且從}\\ a_6，a_8\text{ 中選出}\\ \text{一數}}}+\underbrace{1}_{\text{選出 }a_7\text{ 與 }a_8}=10$$

因此選出 2 數總和為負數的機率為 $\dfrac{6+10}{C_2^8}=\dfrac{16}{28}=\dfrac{4}{7}$

故選(5)。

二、多選題

7. (1)(2)(5)

出處：第一冊〈指數、對數〉、第三冊〈指數與對數函數〉

目標：指數律、常用對數的基本性質與常用對數函數的嚴格遞增

解析：(1) ○：因為 $10^3<2024<10^4$

所以 $\log 10^3<\log 2024<\log 10^4$

$\Rightarrow 3<\log 2024<4 \Rightarrow 6<2\log 2024<8$

$\Rightarrow 6<\log(2024^2)<8 \Rightarrow 6<b<8$

(2) ○：承(1)，可知 $\log 2024>3$

$\Rightarrow (\log 2024)^2>3\log 2024>2\log 2024=\log(2024^2)$

$\Rightarrow c>b$

(3) ╳：承(1)，可知 $3<\log 2024<4$

$\Rightarrow \log 3<\log(\log 2024)<\log 4<\log 10=1$

又 $6<b<8$，所以 $a<b$

(4) ╳：$\log b=\log(\log(2024^2))=\log(2\log 2024)$

$=\log 2+\log(\log 2024)=\log 2+a\neq 2a$

(5) ○：$10^a=10^{\log(\log 2024)}=\log 2024$

$=\sqrt{(\log 2024)^2}=\sqrt{c}$，故選(1)(2)(5)。

8. (2)(3)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：多項式的除法原理、餘式定理與高次不等式

解析：設 $f(x)=x^4+ax^3+bx+c=(x^3+1)q(x)+3x-1$

(1) ╳：由餘式定理可知 $f(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式為

$f(-1)=((-1)^3+1)\,q(-1)+3\times(-1)-1=-4$

(2) ○：因為 $f(x)=(x+1)(x^2-x+1)q(x)+3x-1$

所以 $f(x)$ 除以 x^2-x+1 的餘式為 $3x-1$

(3) ○：因為 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 -2

所以由餘式定理可得 $f(1)=1+a+b+c=-2$

$\Rightarrow a+b+c=-3$

(4) ╳：利用長除法

$$\begin{array}{r|l}
 & x+a \\
\hline
x^3+0x^2+0x+1 & x^4+ax^3+0x^2+bx+c \\
 & x^4+0x^3+0x^2+x \\
\hline
 & ax^3+0x^2+(b-1)x+c \\
 & ax^3+0x^2+0x+a \\
\hline
 & (b-1)x+(c-a)
\end{array}$$

可得 $\begin{cases}b-1=3\\c-a=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=4\\c-a=-1\end{cases}$

承(3)，可知 $a+b+c=-3 \Rightarrow a+c=-7$

解 $\begin{cases}c-a=-1\\a+c=-7\end{cases} \Rightarrow a=-3$，$c=-4$

所以 $a>c$

(5) ╳：承(4)，可知 $f(x)=(x^3+1)(x-3)+3x-1$

$\Rightarrow f(x)-(3x-1)=(x^3+1)(x-3)$

$=(x+1)(x-3)(x^2-x+1)>0$

因為對於任意實數 x，$x^2-x+1>0$ 恆成立，所以可得 $(x+1)(x-3)>0 \Rightarrow x>3$ 或 $x<-1$

即不等式 $f(x)>3x-1$ 的解為 $x>3$ 或 $x<-1$

故選(2)(3)。

9. (2)(4)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：數據的伸縮與平移

解析：設調整前後月薪的平均數分別為 μ_x、μ_y，且標準差分別為 σ_x、σ_y

(1) ╳：可知 $\sigma_y-\sigma_x=|a|\sigma_x-\sigma_x=(a-1)\sigma_x$

$=8000(a-1)=-1600$

$\Rightarrow a=\dfrac{4}{5}<1$

(2) ○：承(1)，可知 $\mu_y=a\mu_x+b=\dfrac{4}{5}\times 41000+b=42800$

$\Rightarrow b=10000 \Rightarrow y=\dfrac{4}{5}x+10000$

所以慧志調整後的月薪為

$\dfrac{4}{5}\times 33000+10000=36400$ (元)

(3) ╳：因為 $0<a<1$，所以調整後兩人的月薪差距變小

(4) ○：因為 $a>0$，所以調整前後的月薪高低排名不變

(5) ╳：當調整後的月薪比調整前的月薪多時，可得

$y-x=\left(\dfrac{4}{5}x+10000\right)-x=-\dfrac{1}{5}x+10000>0$

$\Rightarrow x<50000$

所以調整前月薪高於 50000 元的員工，調整後的月薪會變少，故選(2)(4)。

10. (2)(4)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：直線方程式與圓的定義

解析：(1) ╳：$d(M, x\text{ 軸}):d(M, y\text{ 軸})=|b|:|a|=2:1$

$\Rightarrow |b|=2|a|$

(2) ○：因為 M 為 $\triangle ABC$ 的外接圓圓心

所以 $\overline{MA}=\overline{MB}$，即 M 在 $\overline{AB}$ 的中垂線上

又 $\overline{AB}$ 的中點為 $(-12, 0)$，

且 $m_{AB}=\dfrac{-5-5}{-10-(-14)}=-\dfrac{5}{2}$

因此可得 $\overline{AB}$ 的中垂線為 $y-0=\dfrac{2}{5}(x+12)$

$\Rightarrow 2x-5y+24=0$

即 M 點必位於直線 $2x-5y+24=0$ 上

(3) ╳：承(1)、(2)，可知 $b=\pm 2a$，且 $2x-5y+24=0$ 與 $2x-y=0$ 或 $2x+y=0$ 均有交點

所以 M 點可能位於直線 $2x-y=0$ 上，或直線 $2x+y=0$ 上

(4) ○：承(2)，因為直線 $2x-5y+24=0$ 不通過第四象限，所以 M 點不可能位於第四象限

(5) ╳：承(1)、(2)，討論如下：

①當 $b=2a$ 時，將 $M(a, 2a)$ 代入

$2x-5y+24=0$ 可得 $2a-10a+24=0$

$\Rightarrow a=3 \Rightarrow M(3, 6)$

$\Rightarrow \overline{CM}=\overline{AM}=\sqrt{(3-(-10))^2+(6-(-5))^2}$

$=\sqrt{290}$

②當 $b=-2a$ 時，將 $M(a, -2a)$ 代入

$2x-5y+24=0$ 可得 $2a+10a+24=0$

$\Rightarrow a=-2 \Rightarrow M(-2, 4)$

$\Rightarrow \overline{CM}=\overline{AM}$

$=\sqrt{(-2-(-10))^2+(4-(-5))^2}$

$=\sqrt{145}$

所以 $\overline{CM}$ 長的最小值為 $\sqrt{145}$

故選(2)(4)。

11. (1)(2)(5)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：相關係數與迴歸直線

解析：設 x、y 的平均分數分別為 $\mu_x=60$、$\mu_y=40$，標準差分別為 $\sigma_x=2\sqrt{5}$ 、σ_y，且相關係數為 $r=\frac{4}{5}$ ；x'、y' 的相關係數為 r'

4 位同學與亦程的筆試一分數分別為 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5，筆試二分數分別為 y_1、y_2、y_3、y_4、y_5

(1) ○：因為 y 對 x 的迴歸直線為 L：$y=\frac{2}{5}x+16$

所以 $m_L=\frac{r\sigma_y}{\sigma_x}=\frac{\frac{4}{5}\sigma_y}{2\sqrt{5}}=\frac{2}{5}$

$\Rightarrow \sigma_y=\sqrt{5}$ (分)

(2) ○：$\mu_{x'}=\frac{4\times\mu_x+60}{5}=\frac{4\times 60+60}{5}=60$ (分)

(3) ╳：可知 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$

$=4(\mu_x^2+\sigma_x^2)$

$=4(60^2+(2\sqrt{5})^2)$

$=4(3600+20)=14480$

承(2)，可得

$\sigma_{x'}=\sqrt{\frac{1}{5}(14480+60^2)-\mu_{x'}^2}$

$=\sqrt{\frac{1}{5}(14480+3600)-60^2}$

$=\sqrt{3616-3600}$

$=4$ (分)

〈另解〉

可知

$\sigma_x=\sqrt{\frac{1}{4}((x_1-\mu_x)^2+(x_2-\mu_x)^2+(x_3-\mu_x)^2+(x_4-\mu_x)^2)}$

$=\sqrt{\frac{1}{4}((x_1-60)^2+(x_2-60)^2+(x_3-60)^2+(x_4-60)^2)}$

又承(2)可得 $\mu_{x'}=60$

$\Rightarrow \sigma_{x'}=\sqrt{\frac{1}{5}((x_1-\mu_{x'})^2+(x_2-\mu_{x'})^2+\cdots\cdots+(x_5-\mu_{x'})^2)}$

$=\sqrt{\frac{1}{5}((x_1-60)^2+\cdots\cdots+(x_4-60)^2+(60-60)^2)}$

$=\sqrt{\frac{1}{5}((x_1-60)^2+(x_2-60)^2+(x_3-60)^2+(x_4-60)^2)}$

$=\sqrt{\frac{4}{5}}\sigma_x$

$=\sqrt{\frac{4}{5}}\times 2\sqrt{5}$

$=4$ (分)

(4) ╳：承(2)、(3)，可知 $\mu_{x'}=\mu_x=60$，$\mu_{y'}=\mu_y=40$，

$\sigma_{x'}=\sqrt{\frac{4}{5}}\sigma_x$ ，$\sigma_{y'}=\sqrt{\frac{4}{5}}\sigma_y$ ，

$\Rightarrow r'=\frac{(x_1-\mu_{x'})(y_1-\mu_{y'})+(x_2-\mu_{x'})(y_2-\mu_{y'})+\cdots\cdots+(x_5-\mu_{x'})(y_5-\mu_{y'})}{5\sigma_{x'}\sigma_{y'}}$

$=\frac{(x_1-\mu_x)(y_1-\mu_y)+\cdots\cdots+(x_4-\mu_x)(y_4-\mu_y)+(60-60)(40-40)}{5\times\sqrt{\frac{4}{5}}\sigma_x\times\sqrt{\frac{4}{5}}\sigma_y}$

$=\frac{(x_1-\mu_x)(y_1-\mu_y)+\cdots\cdots+(x_4-\mu_x)(y_4-\mu_y)}{4\sigma_x\sigma_y}$

$=r=\frac{4}{5}$

(5) ○：承(4)，可得 y' 對 x' 的迴歸直線必過點 $(\mu_{x'},\mu_{y'})$，

且其斜率為 $\frac{r'\sigma_{y'}}{\sigma_{x'}}=\frac{r\times\sqrt{\frac{4}{5}}\sigma_y}{\sqrt{\frac{4}{5}}\sigma_x}=\frac{r\sigma_y}{\sigma_x}=m_L=\frac{2}{5}$

所以 y' 對 x' 的迴歸直線為 $y'-40=\frac{2}{5}(x'-60)$

$\Rightarrow y'=\frac{2}{5}x'+16$

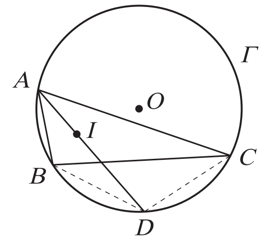
故選(1)(2)(5)。

12. (2)(4)(5)

出處：第二冊〈三角比〉、第三冊〈三角函數〉

目標：餘弦定理、正弦定理、三角形面積公式、扇形的弧長

解析：設圓 Γ 的圓心為 O，作圖如下



(1) ╳：由餘弦定理可得 $\cos\angle BAC=\frac{3^2+8^2-7^2}{2\times3\times8}=\frac{1}{2}$

(2) ○：承(1)可知 $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$

所以由正弦定理可知圓 Γ 的半徑長

$R=\frac{\overline{BC}}{2\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{7}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{7}{\sqrt{3}}$

(3) ╳：承(2)可知 $\angle BAC=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\angle BOC=\frac{2\pi}{3}$ 且 $R=\frac{7}{\sqrt{3}}$

所以劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的弧長為 $\frac{7}{\sqrt{3}}\times\frac{2\pi}{3}=\frac{14\sqrt{3}\pi}{9}$

(4) ○：承(2)，因為 I 為 $\triangle ABC$ 的內心，所以

$\angle BAD=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\angle BOD=\frac{\pi}{3}$ ，又 $\overline{OB}=\overline{OD}=R$

因此可得 $\triangle OBD$ 為正三角形，

即 $\overline{BD}=\overline{OB}=\overline{OD}=R=\frac{7}{\sqrt{3}}$

(5) ○：設 $\overline{AD}=x$，承(4)可知 $\angle BAD=\angle CAD=\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow\overline{CD}=\overline{BD}=\frac{7}{\sqrt{3}}$

因為 $\angle BDC=\pi-\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$

且四邊形 $ABDC$ 面積

$=\triangle ABD$ 面積 $+\triangle ACD$ 面積

$=\triangle ABC$ 面積 $+\triangle BCD$ 面積

所以可得

$\frac{1}{2}\times3\times x\times\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\times8\times x\times\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{1}{2}\times3\times8\times\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{7}{\sqrt{3}}\times\frac{7}{\sqrt{3}}\times\sin\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow 11x=\frac{121\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x=\frac{11\sqrt{3}}{3}$ ，即 $\overline{AD}=\frac{11\sqrt{3}}{3}$

故選(2)(4)(5)。

三、選填題

13. 30

出處：第一冊〈數與式〉、第二冊〈數列與級數〉

目標：遞迴數列、等差數列的一般項、算幾不等式

解析：可知數列〈a_n〉為等差數列，其首項為 α，公差為 k

所以 $a_3+2a_5=(\alpha+2k)+2(\alpha+4k)=3\alpha+10k=60$

由算幾不等式可得 $\dfrac{3\alpha+10k}{2}\geq\sqrt{3\alpha\times10k}\Rightarrow30\geq\sqrt{30\alpha k}$

$\Rightarrow\alpha k\leq30$，其中當 $3\alpha=10k$ 時，等號成立

故 αk 的最大值為 30。

14. $2\sqrt{2}+\sqrt{6}$

出處：第二冊〈三角比〉、第三冊〈三角函數〉

目標：直角三角形的邊角關係、三角形面積公式與正弦的和角公式

解析：設 $\angle DEF=\theta$

可知 $\cos\theta=\dfrac{\overline{EF}}{\overline{DE}}=\dfrac{2}{\sqrt{4^2+2^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，

$\sin\theta=\dfrac{\overline{DF}}{\overline{DE}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

因為 $\angle C'EF'=45^\circ$，所以 $\angle DEC'=\theta+15^\circ+45^\circ=\theta+60^\circ$

$\Rightarrow\sin\angle DEC'=\sin(\theta+60^\circ)=\sin\theta\cos60^\circ+\cos\theta\sin60^\circ$

$=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$

故 $\triangle DEC'$ 的面積 $=\dfrac{1}{2}\times\overline{DE}\times\overline{C'E}\times\sin\angle DEC'$

$=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times2\sqrt{2}\times\dfrac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$

$=2\sqrt{2}+\sqrt{6}$。

15. 32260

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：等差數列與常用的求和公式

解析：可知數列〈a_n〉為 4，9，14，19，24，29，34，……

即〈a_n〉為首項是 4，公差是 5 的等差數列

所以數列〈b_n〉為 4，14，24，34，……

即〈b_n〉為首項是 4，公差是 10 的等差數列

可得 $b_n=4+10(n-1)=-6+10n$

$\Rightarrow b_n{}^2=(-6+10n)^2=100n^2-120n+36$

$\Rightarrow b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots\cdots+b_{10}{}^2$

$=(100\times1^2-120\times1+36)+(100\times2^2-120\times2+36)$

$+\cdots\cdots+(100\times10^2-120\times10+36)$

$=100\times(1^2+2^2+\cdots\cdots+10^2)-120\times(1+2+\cdots\cdots+10)$

$+36\times10$

$=100\times\dfrac{10\times11\times21}{6}-120\times\dfrac{10\times11}{2}+360$

$=38500-6600+360=32260$。

16. $\dfrac{37}{36}$

出處：第一冊〈直線與圓〉、第二冊〈排列組合與機率〉

目標：直線的平移、圓與直線的關係及期望值

解析：設圓 Γ 的圓心為 $M(0,0)$，半徑為 $r=5$

可知 L'：$3(x-a)+4(y-b)=0$

$\Rightarrow L'$：$3x+4y-3a-4b=0$，討論如下：

⑴當 $d(M,L')<r$ 時 (即圓 Γ 與 L' 相交兩點)

可得 $\dfrac{|-3a-4b|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{3a+4b}{5}<5\Rightarrow3a+4b<25$

①當 $a=1$ 時，可得 $4b<22\Rightarrow b=1$，2，……，5

②當 $a=2$ 時，可得 $4b<19\Rightarrow b=1$，2，3，4

③當 $a=3$ 時，可得 $4b<16\Rightarrow b=1$，2，3

④當 $a=4$ 時，可得 $4b<13\Rightarrow b=1$，2，3

⑤當 $a=5$ 時，可得 $4b<10\Rightarrow b=1$，2

⑥當 $a=6$ 時，可得 $4b<7\Rightarrow b=1$

所以 L' 與圓 Γ 相交兩點的機率為

$\dfrac{5+4+3+3+2+1}{6^2}=\dfrac{18}{36}$

⑵當 $d(M,L')=r$ 時 (即圓 Γ 與 L' 相切一點)

可得 $3a+4b=25\Rightarrow a=3$，$b=4$

所以 L' 與圓 Γ 相切一點的機率為 $\dfrac{1}{6^2}=\dfrac{1}{36}$

故 L' 與圓 Γ 交點個數的期望值為

$2\times\dfrac{18}{36}+1\times\dfrac{1}{36}=\dfrac{37}{36}$ (個)。

17. $2\sqrt{21}$

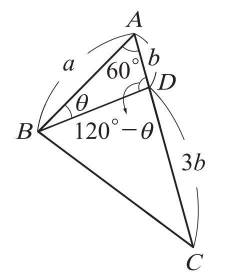
出處：第二冊〈三角比〉、第三冊〈三角函數〉

目標：正弦定理與正、餘弦函數的疊合公式

解析：設 $\overline{AB}=a$，$\overline{AD}=b$，$\angle ABD=\theta$

可知 $\angle ADB=180^\circ-60^\circ-\theta=120^\circ-\theta$，$\overline{AC}=4\overline{AD}=4b$

作略圖如下



在 $\triangle ABD$ 中，

由正弦定理可知 $\dfrac{\overline{AB}}{\sin\angle ADB}=\dfrac{\overline{AD}}{\sin\angle ABD}=2$

$\Rightarrow\dfrac{a}{\sin(120^\circ-\theta)}=\dfrac{b}{\sin\theta}=2$

$\Rightarrow\begin{cases}a=2\sin(120^\circ-\theta)\\b=2\sin\theta\end{cases}$

$\Rightarrow\overline{AB}+\overline{AC}=a+4b=2\sin(120^\circ-\theta)+8\sin\theta$

$=2(\sin120^\circ\cos\theta-\cos120^\circ\sin\theta)+8\sin\theta$

$=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\left(\dfrac{-1}{2}\right)\sin\theta\right)+8\sin\theta$

$=(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)+8\sin\theta$

$=9\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$

$=\sqrt{84}\left(\sin\theta\times\dfrac{9}{\sqrt{84}}+\cos\theta\times\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{84}}\right)$

$=\sqrt{84}\sin(\theta+\phi)\leq\sqrt{84}=2\sqrt{21}$

其中 $\cos\phi=\dfrac{9}{\sqrt{84}}$，$\sin\phi=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{84}}$

故 $\overline{AB}+\overline{AC}$ 的最大值為 $2\sqrt{21}$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. (5)

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：向量的係數積與正射影長

解析：因為 $|\overrightarrow{u}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

所以 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{u}=(2,6)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BA}=(-2,-6)$，又 $\overrightarrow{BC}\,//\,\overrightarrow{v}$

因此 $\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的正射影長

$=\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{v}$ 上的正射影長

$=\dfrac{|\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{v}|}$

$=\dfrac{|(-2)\times2+(-6)\times(-1)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$

$=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

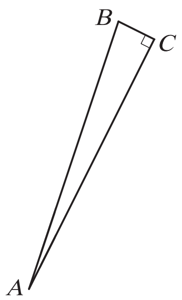
故選(5)。

19. 最小值 $\dfrac{14\sqrt{5}}{5}$，此時 $k=\dfrac{2}{5}$

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：兩向量的垂直

解析：可知當 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$ 時，$|\overrightarrow{AC}|$ 有最小值，作圖如下



承 18. 可知此時 $\overline{BC}=\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的正射影長 $=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

因為 $|\overrightarrow{v}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$，且 $\overline{BC}=k|\overrightarrow{v}|$

所以 $k\sqrt{5}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow k=\dfrac{2}{5}$

即 $k=\dfrac{2}{5}$ 時，$|\overrightarrow{AC}|$ 有最小值，

其最小值為 $\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}$

$=\sqrt{(2\sqrt{10})^2-\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}$

$=\dfrac{14\sqrt{5}}{5}$。

〈另解〉

承 18. 可知 $\overrightarrow{BA}=(-2,-6)$，且 $\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{v}=(2k,-k)$

所以 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$

$=(2k,-k)-(-2,-6)$

$=(2k+2,-k+6)$

當 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{v}$ 時，$|\overrightarrow{AC}|$ 有最小值

因此可得 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{v}$

$=(2k+2,-k+6)\cdot(2,-1)$

$=(2k+2)\times2+(-k+6)\times(-1)$

$=5k-2=0$

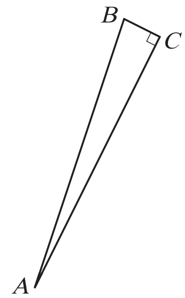
$\Rightarrow k=\dfrac{2}{5}\Rightarrow\overrightarrow{AC}=\left(\dfrac{14}{5},\dfrac{28}{5}\right)$

$\Rightarrow|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{\left(\dfrac{14}{5}\right)^2+\left(\dfrac{28}{5}\right)^2}=\dfrac{14}{5}\sqrt{1^2+2^2}=\dfrac{14\sqrt{5}}{5}$

故 $k=\dfrac{2}{5}$ 時，$|\overrightarrow{AC}|$ 有最小值 $\dfrac{14\sqrt{5}}{5}$。

◎評分原則

可知當 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$ 時，$|\overrightarrow{AC}|$ 有最小值，作圖如下



承 18. 可知此時 $\overline{BC}=\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的正射影長 $=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

因為 $|\overrightarrow{v}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$，且 $\overline{BC}=k|\overrightarrow{v}|$

所以 $k\sqrt{5}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　(1 分)

$\Rightarrow k=\dfrac{2}{5}$

即 $k=\dfrac{2}{5}$ 時　(1 分)，$|\overrightarrow{AC}|$ 有最小值，

其最小值為 $\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}$

$=\sqrt{(2\sqrt{10})^2-\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}$

$=\dfrac{14\sqrt{5}}{5}$。　(2 分)

〈另解〉

承 18. 可知 $\overrightarrow{BA}=(-2,-6)$，且 $\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{v}=(2k,-k)$

所以 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$

$=(2k,-k)-(-2,-6)$

$=(2k+2,-k+6)$

當 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{v}$ 時，$|\overrightarrow{AC}|$ 有最小值

因此可得 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{v}$

$=(2k+2,-k+6)\cdot(2,-1)$

$=(2k+2)\times2+(-k+6)\times(-1)$

$=5k-2=0$　(1 分)

$\Rightarrow k=\dfrac{2}{5}\Rightarrow\overrightarrow{AC}=\left(\dfrac{14}{5},\dfrac{28}{5}\right)$

$\Rightarrow|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{\left(\dfrac{14}{5}\right)^2+\left(\dfrac{28}{5}\right)^2}=\dfrac{14}{5}\sqrt{1^2+2^2}=\dfrac{14\sqrt{5}}{5}$

故 $k=\dfrac{2}{5}$ 時　(1 分)，$|\overrightarrow{AC}|$ 有最小值 $\dfrac{14\sqrt{5}}{5}$。　(2 分)

20. 最小值 $\frac{2\sqrt{17}}{3}$，此時 $k=1$

出處：第一冊〈多項式函數〉、第三冊〈平面向量〉

目標：二次函數的配方法與向量的分點公式

解析：承 18. 可知 $\overrightarrow{BA}=-2\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{v}$

因為 D 在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{AD}:\overline{DC}=2:1$

所以由向量的分點公式可得

$$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$
$$=\frac{1}{3}(-2\overrightarrow{u})+\frac{2}{3}(k\overrightarrow{v})$$
$$=\frac{-2}{3}\overrightarrow{u}+\frac{2k}{3}\overrightarrow{v}$$

$\Rightarrow|\overrightarrow{BD}|$

$$=\left|\frac{-2}{3}\overrightarrow{u}+\frac{2k}{3}\overrightarrow{v}\right|$$
$$=\sqrt{\left(\frac{-2}{3}\right)^2|\overrightarrow{u}|^2+\left(\frac{2k}{3}\right)^2|\overrightarrow{v}|^2+2\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{2k}{3}\right)\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}$$
$$=\sqrt{\frac{4}{9}\times10+\frac{4k^2}{9}\times5-\frac{8k}{9}(1\times2+3\times(-1))}$$
$$=\sqrt{\frac{20}{9}k^2+\frac{8}{9}k+\frac{40}{9}}$$
$$=\sqrt{\frac{20}{9}\left(k+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{196}{45}}$$
$$\geq\sqrt{\frac{20}{9}\left(1+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{196}{45}}=\frac{2\sqrt{17}}{3}$$

故 $k=1$ 時，$|\overrightarrow{BD}|$ 有最小值 $\frac{2\sqrt{17}}{3}$。

〈另解〉

承 18. 可知 $\overrightarrow{BA}=(-2,-6)$，$\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{v}=(2k,-k)$

因為 D 在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{AD}:\overline{DC}=2:1$

所以由向量分點公式可得

$$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$
$$=\frac{1}{3}(-2,-6)+\frac{2}{3}(2k,-k)$$
$$=\left(\frac{4k-2}{3},\frac{-6-2k}{3}\right)$$

$$\Rightarrow|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{\left(\frac{4k-2}{3}\right)^2+\left(\frac{-6-2k}{3}\right)^2}$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{(2k-1)^2+(-3-k)^2}$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{5k^2+2k+10}$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{5\left(k+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{49}{5}}$$
$$\geq\frac{2}{3}\sqrt{5\left(1+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{49}{5}}=\frac{2\sqrt{17}}{3}$$

故 $k=1$ 時，$|\overrightarrow{BD}|$ 有最小值 $\frac{2\sqrt{17}}{3}$。

◎評分原則

承 18. 可知 $\overrightarrow{BA}=-2\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{v}$

因為 D 在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{AD}:\overline{DC}=2:1$

所以由向量的分點公式可得

$$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(-2\overrightarrow{u})+\frac{2}{3}(k\overrightarrow{v})$$
$$=\frac{-2}{3}\overrightarrow{u}+\frac{2k}{3}\overrightarrow{v}\quad(1\text{ 分})$$

$$\Rightarrow|\overrightarrow{BD}|=\left|\frac{-2}{3}\overrightarrow{u}+\frac{2k}{3}\overrightarrow{v}\right|$$
$$=\sqrt{\left(\frac{-2}{3}\right)^2|\overrightarrow{u}|^2+\left(\frac{2k}{3}\right)^2|\overrightarrow{v}|^2+2\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{2k}{3}\right)\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}$$
$$=\sqrt{\frac{4}{9}\times10+\frac{4k^2}{9}\times5-\frac{8k}{9}(1\times2+3\times(-1))}$$
$$=\sqrt{\frac{20}{9}k^2+\frac{8}{9}k+\frac{40}{9}}\quad(2\text{ 分})$$
$$=\sqrt{\frac{20}{9}\left(k+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{196}{45}}\quad(1\text{ 分})$$
$$\geq\sqrt{\frac{20}{9}\left(1+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{196}{45}}=\frac{2\sqrt{17}}{3}$$

故 $k=1$ 時 (2 分)，$|\overrightarrow{BD}|$ 有最小值 $\frac{2\sqrt{17}}{3}$。 (2 分)

〈另解〉

承 18. 可知 $\overrightarrow{BA}=(-2,-6)$，$\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{v}=(2k,-k)$

因為 D 在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{AD}:\overline{DC}=2:1$

所以由向量分點公式可得

$$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(-2,-6)+\frac{2}{3}(2k,-k)$$
$$=\left(\frac{4k-2}{3},\frac{-6-2k}{3}\right)\quad(1\text{ 分})$$

$$\Rightarrow|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{\left(\frac{4k-2}{3}\right)^2+\left(\frac{-6-2k}{3}\right)^2}$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{(2k-1)^2+(-3-k)^2}$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{5k^2+2k+10}\quad(2\text{ 分})$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{5\left(k+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{49}{5}}\quad(1\text{ 分})$$
$$\geq\frac{2}{3}\sqrt{5\left(1+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{49}{5}}=\frac{2\sqrt{17}}{3}$$

故 $k=1$ 時 (2 分)，$|\overrightarrow{BD}|$ 有最小值 $\frac{2\sqrt{17}}{3}$。 (2 分)