

# 北北基高級中等學校 114 學年度學測模擬考數學 A(114-E3)

第壹部分：選擇題(占 85 分)



## 一、單選題(占 30 分)

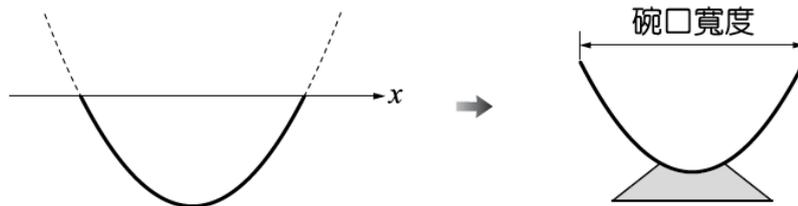
1. 坐標平面上，從 $(0,0)$ 、 $(1,0)$ 、 $(0,1)$ 、 $(2,0)$ 、 $(1,1)$ 、 $(0,2)$ 這六個點中隨機選取相異兩個點(假設每個點被選到的機會均等)，則選取兩點的距離大於 1 的機率為何？

- (1)  $\frac{1}{3}$     (2)  $\frac{2}{3}$     (3)  $\frac{1}{5}$     (4)  $\frac{2}{5}$     (5)  $\frac{3}{5}$

2. 設 $\{a_n\}$ 為一等比數列，且前 $n$ 項總和記為 $S_n$ 。若 $a_4 = \frac{1}{8}$ 、 $a_7 = \frac{1}{64}$ ，則所有點 $(n, S_n)$  ( $n$  為正整數)會在下列哪一個選項的函數圖形上？(1)  $y = -2^x + \frac{5}{2}$     (2)  $y = -2^{-x} + \frac{3}{2}$

- (3)  $y = -2^{1-x} + 2$     (4)  $y = 2^{x-1} - \frac{1}{2}$     (5)  $y = 2^x - \frac{3}{2}$

3. 某工廠以電腦程式繪製了拋物線 $y = 2x^2 + (2k+2)x + (2k-1)$ 的圖形，並取 $y \leq 0$ 的部分，設計成一款側面為拋物線形狀的碗，如下圖所示。



工程師正在測試不同的實數 $k$ 值對碗口寬度的影響，試問當 $k$ 值為何時，碗口寬度會最小？(1) -1    (2) 0    (3) 1    (4) -1    (5) 3

4. 四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 3$ 、 $\overline{AC} = 2$ 、 $\overline{AD} = 1$ ，且 $\angle BAD = 120^\circ$ 。試求四邊形 $ABCD$ 面積的最大可能值為何？(1)  $\sqrt{10}$     (2)  $\sqrt{11}$     (3)  $\sqrt{12}$     (4)  $\sqrt{13}$     (5)  $\sqrt{14}$

5. 如右略圖，同一水平線上兩地點 $A$ 與 $B$ 由坡道 $\overline{AC}$ 與坡道

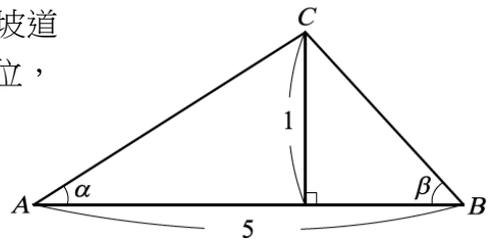
$\overline{CB}$ 連接，坡道頂點為 $C$ 。設 $A$ 、 $B$ 間的距離為 5 單位，

$C$ 點的高度為 1 單位。令 $\angle CAB = \alpha$ 、 $\angle CBA = \beta$ 、

$\tan \alpha = x$ 。若一臺小車在坡道上從 $A$ 行駛至 $B$ ，

在上坡路段 $\overline{AC}$ 的行駛速度為每分鐘 $\cos \alpha$ 單位；

在下坡路段 $\overline{CB}$ 的行駛速度為每分鐘 $\frac{1}{\cos \beta}$ 單位，則小車在坡道上從 $A$ 行駛至 $B$ 的時間為



下列哪一個選項？(1)  $x+5$ 分鐘    (2)  $5x+1$ 分鐘    (3)  $\frac{x}{5x+1}$ 分鐘

- (4)  $\frac{x}{x+5}$ 分鐘    (5)  $x+10+\frac{1}{5x-1}$ 分鐘

6. 設正實數 $x, y, z, k$ 滿足 $2 + \log_2 x = 4 + \log_4 y = 8 + \log_8 z = k$ ，且 $x < y < z$ ，則下列選項何者是可能的 $k$ 值？(1) 10    (2) 15    (3)  $\log 114$     (4)  $\log_2 2025$     (5)  $\pi^\pi$

## 二、多選題(占 30 分)

7. 已知實係數三次多項式 $f(x)$ 除以 $(x-3)^3$ 的餘式為一次多項式 $g(x)$ ，試選出正確的選

項。(1)  $f(3) = g(3)$     (2)  $y = f(x)$ 的圖形在 $x=3$ 附近會近似於直線 $y = g(x)$

(3)  $y = f(x)$ 圖形的對稱中心為 $(3,0)$     (4)  $y = f(x) - g(x)$ 圖形的對稱中心為 $(3,0)$

(5)  $y = f(x)$ 的圖形與 $y = g(x)$ 的圖形有三個交點

8. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 的一般項為 $a_n = n^2 - 10n + 9$  ( $n$  為正整數)，試選出正確的選項。  
 (1)數列 $\langle a_n \rangle$ 中，恰有 9 項小於 0 (2) $a_{100}$  為 39 的倍數 (3)數列 $\langle a_n \rangle$ 中，值最小的為 $a_5$   
 (4) $a_1, a_2, \dots, a_{10}, a_{11}$ 的中位數為 $-15$  (5) $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_{10}| + |a_{11}| > 120$
9. 已知 $f(x) = |x| + |x - a|$ ，其中 $a$ 為正實數，若 $f(x)$ 的最小值為 2，試選出正確的選項。  
 (1) $a = 2$  (2) $f(x)$ 的最大值為 10 (3)不等式 $f(x) \leq 4$ 的解為 $-1 \leq x \leq 3$   
 (4)若 $x_1, x_2$ 是兩相異實數且 $f(x_1) = f(x_2)$ ，則 $x_1 + x_2 = 2$   
 (5)若點 $(h, k)$ 在 $y = f(x)$ 的圖形上，則點 $(2 - h, 4 - k)$ 也在 $y = f(x)$ 的圖形上
10.  $\triangle OAB$ 中， $\overline{OA} = 5$ ， $\overline{OB} = 3$ ， $\angle AOB = 120^\circ$ ，設 $M$ 為 $\overline{AB}$ 的中點， $\triangle OAM$ 與 $\triangle OMB$ 的重心分別為 $G_1$ 與 $G_2$ ，試選出正確的選項。  
 (1)  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{15}{2}$  (2)  $\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$   
 (3)  $3(\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_2}) = 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$  (4)  $\overrightarrow{G_1G_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$  (5)  $\overrightarrow{OG_1} \cdot \overrightarrow{OG_2} = \frac{3}{4}$
11. 有一種特製的公正骰子，其六個面上的點數分別為 1、1、2、3、4、5。今連續投擲此骰子四次，並將第一、二、三、四次所得的點數依序填入右圖 A、B、C、D 的四個格子中，試選出正確的選項。

A	B
C	D

- (1)四格填入的數字均不為 1 的機率為 $\frac{24}{6^4}$  (2)四格均填入數字 1 的機率為 $\frac{16}{6^4}$   
 (3)四格數字均相異的機率為 $\frac{120}{6^4}$  (4)四格數字的和為 18 的機率為 $\frac{10}{6^4}$   
 (5)相鄰的格子填入的數字不同且 A、D 填入相同數字之機率為 $\frac{164}{6^4}$

12. 五位學生參與某次學科能力測驗，本次測驗共有數學(X)與物理(Y)兩個科目，他們的成績及相關統計數據如下表所示：

學生 成績 科目	甲	乙	丙	丁	戊	平均	標準差
	數學 X	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	3
物理 Y	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	4	2
X 與 Y 的相關係數為 $\frac{1}{2}$							

- 今將數學與物理成績採用加權計算總分得成績 $Z$ ，其 $z_i = 2x_i + y_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ )，試選出正確的選項。  
 (1)Y 對 X 的最適直線方程式為 $y = \frac{1}{4}x + \frac{15}{4}$   
 (2) $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + x_5y_5 = 65$  (3)成績 Z 的平均數為 10  
 (4)成績 Z 的標準差為 $2\sqrt{3}$  (5)成績 Z 與 Y 的相關係數小於 $\frac{1}{2}$

### 三、選填題(占 25 分)

13. 坐標平面上，已知兩非零向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 不平行，若 $\vec{a}$ 、 $\frac{1}{3}\vec{b}$ 、 $t\vec{a} + \frac{1}{2}t\vec{b}$ 三向量的始點相同且終點在同一直線上，則實數 $t$ 之值為\_\_\_\_\_。(化為最簡分數)
14. 在坐標平面上，過點 $P$ 作直線 $L$ 的垂線所得的垂足稱為點 $P$ 在直線 $L$ 上的投影點。已知

聯立不等式  $\begin{cases} x-3y+4 \geq 0 \\ x+y \leq 4 \\ y \geq 1 \end{cases}$  所對應的區域中，所有點在直線  $x+y=3$  上的投影點形成一線段，則此線段的長度為\_\_\_\_\_。(化為最簡根式)

15. 一數學試卷有 6 題單選題（每題均有  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$  五個選項，其中一個為正確答案），命題教師為了避免 6 題都猜一樣答案的學生得分過高，因此依以下原則設計正確答案：(I) 選項  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$  至多只有一個不出現在正確答案中。(II) 正確答案為同一個選項的，至多為兩題。例如，6 題的正確答案依序為  $BCADAB$  或  $BCAEAD$  皆是符合(I)(II)原則的；而  $BACCCD$  或  $AACEEC$  皆為不符合的。試問此試卷 6 題單選題的正確答案之次序有\_\_\_\_\_種不同的可能。
16. 坐標平面上，已知圓  $C_1: (x+3)^2 + (y-1)^2 = 4$ ，圓  $C_2: (x-4)^2 + (y-5)^2 = 4$  及點  $A(4,0)$ 。設直線  $L_1$  過點  $A$  且與圓  $C_1$  交於  $P$ 、 $Q$  兩點，直線  $L_2$  亦過點  $A$  且與圓  $C_2$  交於  $R$ 、 $S$  兩點。若  $L_1$  垂直  $L_2$  且  $\overline{PQ} = \overline{RS}$ ，則直線  $L_1$  的斜率為\_\_\_\_\_。(化為最簡分數)
17. 一袋中裝有編號分別為 1、2、3 的三顆球。隨機抽取一球，將球放回後，再隨機抽取一球，假設每球被抽取的機會均等，若兩次取球的編號依序為  $a$ 、 $b$ ，則方程式  $a \sin bx = \frac{x}{\pi}$  在  $0 \leq x \leq \pi$  內實數解個數的期望值為\_\_\_\_\_個。(化為最簡分數)

### 第貳部分：混合題或非選擇題(占 15 分)

#### 18-20 題為題組

坐標平面上三相異點  $A(a,0)$ 、 $B(-a,0)$ 、 $C(0,b)$ ，其中  $a$ 、 $b$  為正實數。若  $D$ 、 $E$  分別為線段  $\overline{CA}$  與  $\overline{CB}$  的中點，試回答下列問題。

18. 向量  $\overrightarrow{BD}$  的坐標表示法為下列哪一個選項？(單選題)

- (1)  $(a,b)$     (2)  $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$     (3)  $\left(-\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$     (4)  $\left(\frac{3a}{2}, \frac{b}{2}\right)$     (5)  $\left(-\frac{3a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

19. 若  $\overline{BD}$  垂直  $\overline{AE}$ ，試求  $\sin \angle ACB$ 。

20. 若  $\overline{AE} = 3$ ，試求  $\triangle ABC$  面積的最大值，及此時  $\triangle ABC$  的外接圓半徑。

參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$ 。

指對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$ 。

$10^{0.3010} \approx 2$ ， $10^{0.4771} \approx 3$ ， $10^{0.6990} \approx 5$ ， $10^{0.8451} \approx 7$ 。

RA3101 北北基高級中等學校 114 學年度學測模擬考數學 A(114-E3)

參考答案

選擇題：1.(5) 2.(3) 3.(3) 4.(4) 5.(1) 6.(5) 7.(1)(2)(4) 8.(2)(3) 9.(1)(3)

10.(3)(5) 11.(2)(4)(5) 12.(2)(3)(4)

選填題：13. $\frac{2}{5}$  14. $2\sqrt{2}$  15.7200 16. $\frac{-1}{12}$  17. $\frac{8}{3}$

混合題：18.(4) 19. $\frac{3}{5}$  20.面積最大為 6，此時半徑為 $\frac{5\sqrt{2}}{3}$