數學 A 考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(5)	(3)	(3)	(4)	(1)	(5)	(1)(2)(4)
8.	9.	10.	11.	12.		
(2)(3)	(1)(3)	(3)(5)	(2)(4)(5)	(2)(3)(4)		

第壹部分、選擇（填）題

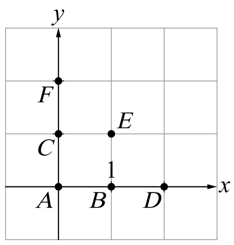
一、單選題

1. (5)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：古典機率的求法

解析：



共有 $C^6_2=15$ 種選法，其中距離為 1 的有 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BD}$ 、 $\overline{CE}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{CF}$ 、 $\overline{BE}$ ，共 6 種

$\therefore$所求為 $1-\dfrac{6}{15}=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$

故選(5)。

2. (3)

出處：第二冊〈數列與級數〉、第三冊〈指數與對數函數〉

目標：等比級數的總和、指數函數的基本概念

解析：$\begin{cases} a_4=\dfrac{1}{8}=a_1r^3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ a_7=\dfrac{1}{64}=a_1r^6 \cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

$\dfrac{②}{①}\Rightarrow r^3=\dfrac{1}{8}\Rightarrow r=\dfrac{1}{2}$，代回①得 $a_1=1$

$$S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}=\frac{1\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$=2-2\times2^{-n}$

$\Rightarrow S_n=-2^{1-n}+2$

$\therefore$點 $(n\,,S_n)$ 在函數 $y=-2^{1-x}+2$ 的圖形上

故選(3)。

3. (3)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：二次函數的應用

解析：$D=(2k+2)^2-4\times2\times(2k-1)$

$=4k^2+8k+4-16k+8=4k^2-8k+12$

令 $y=0\Rightarrow 2x^2+(2k+2)x+(2k-1)=0$

$\Rightarrow x=\dfrac{-(2k+2)\pm\sqrt{D}}{4}$

碗口寬度$=\dfrac{-(2k+2)+\sqrt{D}}{4}-\dfrac{-(2k+2)-\sqrt{D}}{4}$

$=\dfrac{\sqrt{D}}{2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{4k^2-8k+12}=\dfrac{1}{2}\sqrt{4(k-1)^2+8}$

當 $k=1$ 時，有最小值為 $\dfrac{1}{2}\sqrt{8}=\sqrt{2}$

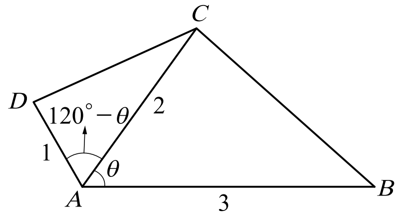
故選(3)。

4. (4)

出處：第三冊〈三角函數〉

目標：能利用正餘弦疊合求極值

解析：



令$\angle CAB=\theta$，則$\angle DAC=120^\circ-\theta\ (0^\circ<\theta<120^\circ)$

四邊形 $ABCD$ 的面積為

$\triangle ABC$ 面積$+\triangle ACD$ 面積

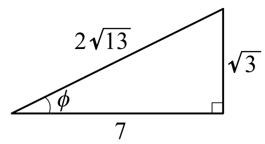
$=\dfrac{1}{2}\times2\times3\times\sin\theta+\dfrac{1}{2}\times1\times2\times\sin(120^\circ-\theta)$

$=3\sin\theta+\sin120^\circ\cos\theta-\cos120^\circ\sin\theta$

$=3\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\dfrac{1}{2}\sin\theta=\dfrac{7}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$

$=\sqrt{13}\left(\dfrac{7}{2\sqrt{13}}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}\cos\theta\right)$

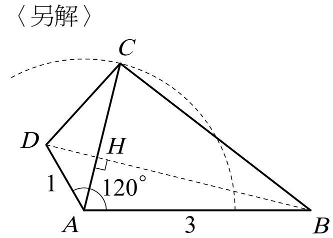
$=\sqrt{13}\,(\cos\phi\sin\theta+\sin\phi\cos\theta)=\sqrt{13}\,\sin(\theta+\phi)$



當 $\theta=90^\circ-\phi$時，面積有最大值為 $\sqrt{13}$

故選(4)。

〈另解〉



C 點在以 A 點為圓心，半徑為 2 的圓上

$\because\triangle ABD$ 的面積為定值

$\therefore$四邊形 $ABCD$ 面積最大

$\Leftrightarrow\triangle BCD$ 面積最大

$\Leftrightarrow$點 C 到直線 BD 的距離最大

因此當 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$ 時，四邊形 $ABCD$ 面積最大

而 $\overline{BD}^2=3^2+1^2-2\times3\times1\times\cos120^\circ=9+1+3=13$

得 $\overline{BD}=\sqrt{13}$

所求最大面積為

$\dfrac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{AH}+\dfrac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{CH}$

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{BD}\times(\overline{AH}+\overline{CH})$

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{AC}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{13}\times2=\sqrt{13}$

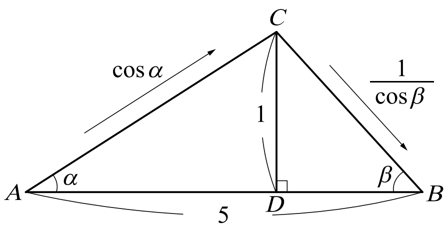
故選(4)。

5. (1)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：銳角三角比定義的運用

解析：



設 D 為 C 在 $\overleftrightarrow{AB}$ 上的垂足

$\triangle ACD$ 中，$\overline{AC}=\dfrac{1}{\sin\alpha}$，$\overline{AD}=\dfrac{1}{\tan\alpha}=\dfrac{1}{x}$

$\triangle BCD$ 中，$\overline{BC}=\dfrac{1}{\sin\beta}$，

$\overline{BD}=\dfrac{1}{\tan\beta}=\overline{AB}-\overline{AD}=5-\dfrac{1}{x}$

小車行駛時間為

$$\frac{\overline{AC}}{\cos\alpha}+\frac{\overline{BC}}{\frac{1}{\cos\beta}}=\frac{\frac{1}{\sin\alpha}}{\cos\alpha}+\frac{\frac{1}{\sin\beta}}{\frac{1}{\cos\beta}}$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}$$

$$\because \tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$\therefore$ 所求時間為 $\tan\alpha+\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{1}{\tan\beta}=x+\dfrac{1}{x}+5-\dfrac{1}{x}$

$=x+5$

故選(1)。

6. (5)

出處：第三冊〈指數與對數函數〉

目標：對數的基本運算、指數大小關係的判斷

解析：由 $2+\log_2 x=4+\log_4 y=8+\log_8 z=k$

得 $\log_2 x=k-2\Rightarrow x=2^{k-2}$

$\log_4 y=k-4\Rightarrow y=4^{k-4}=2^{2k-8}$

$\log_8 z=k-8\Rightarrow z=8^{k-8}=2^{3k-24}$

$\because x<y<z$

$\therefore k-2<2k-8<3k-24$

$$\Rightarrow\begin{cases}3k-24>2k-8\\2k-8>k-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k>16\\k>6\end{cases}\Rightarrow k>16$$

(1)╳

(2)╳

(3)╳：$\log 114<\log 1000=3$

(4)╳：$\log_2 2025<\log_2 2048=11$

(5)○：$\pi^{\pi}>3^3=27$

故選(5)。

二、多選題

7. (1)(2)(4)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：三次函數的基本概念

解析：$f(x)=a\times(x-3)^3+g(x)$，其中 a 為非零實數

(1)○：$f(3)=a\times 0^3+g(3)\Rightarrow f(3)=g(3)$

(2)○：$\because \deg g(x)=1$

$\therefore f(x)$ 在 $x=3$ 附近會近似於直線 $y=g(x)$

(3)╳：若 $g(x)=b(x-3)+c$，則 $f(3)=g(3)=c$

對稱中心為 $(3,c)$，不一定為 $(3,0)$

(4)○：$f(x)-g(x)=a(x-3)^3$，對稱中心為 $(3,0)$

(5)╳：$f(x)=g(x)\Rightarrow f(x)-g(x)=0\Rightarrow a(x-3)^3=0\Rightarrow x=3$

$\therefore y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 的圖形僅有一個交點

故選(1)(2)(4)。

8. (2)(3)

出處：第一冊〈多項式函數〉、第二冊〈數列與級數〉、第二冊〈數據分析〉

目標：利用二次函數的性質處理數列問題

解析：(1)╳：$a_n=n^2-10n+9=(n-9)(n-1)<0$

$\Rightarrow 1<n<9$

則 a_2，a_3，……，a_8 均小於 0 (共 7 項)

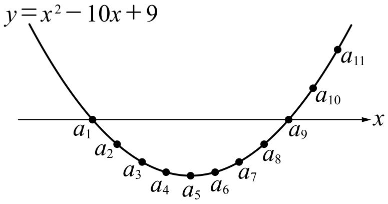
(2)○：$a_{100}=(100-9)(100-1)=91\times 99=7\times 13\times 3^2\times 11$

為 $13\times 3=39$ 的倍數

(3)○：$a_n=n^2-10n+9=(n-5)^2-16$

即 $a_5=-16$ 為最小值

(4)╳：$y=x^2-10x+9$



$a_1\sim a_{11}$ 從小到大排序為：

$a_5<a_4=a_6<a_3=a_7<a_2=a_8<\cdots\cdots$

中位數為 $a_2=2^2-20+9=-7$

(5)╳：

$a_1=1^2-10\times 1+9$

$a_2=2^2-10\times 2+9$

$a_3=3^2-10\times 3+9$

$\vdots$

$a_8=8^2-10\times 8+9$

$+)\ a_9=9^2-10\times 9+9$

$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_9$

$=\dfrac{1}{6}\times 9\times 10\times 19-10\times\dfrac{9\times 10}{2}+81$

$=285-450+81=-84$

$a_{10}=10^2-10\times 10+9=9$

$a_{11}=11^2-10\times 11+9=20$

$\because a_1$，……，$a_9\le 0$，a_{10}，$a_{11}>0$

$\therefore |a_1|+|a_2|+\cdots\cdots+|a_{10}|+|a_{11}|$

$=|a_1+\cdots\cdots+a_9|+a_{10}+a_{11}$

$=84+9+20=113<120$

故選(2)(3)。

9. (1)(3)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：能處理絕對值方程式、不等式的相關問題

解析：①若 $x>a$：

$f(x)=x+x-a=2x-a>2a-a=a$

②若 $0\le x\le a$：

$f(x)=x+a-x=a$

③若 $x<0$：

$f(x)=-x+a-x=a-2x>a$ ($\because x<0\Rightarrow -2x>0$)

由①、②、③知，$f(x)\ge a$ 且當 $0\le x\le a$ 時，$f(x)$ 有最小值為 a

(1) ○：$\because f(x)$ 的最小值為 2　$\therefore a=2$

(2) ╳：$f(x)$ 沒有最大值

(3) ○：$f(x)\le 4\Rightarrow |x|+|x-2|\le 4$

當 $x<0$ 時：

$-x+(2-x)=2-2x\le 4\Rightarrow x\ge -1$

當 $0\le x\le 2$ 時：

$x+(2-x)=2\le 4$，合

當 $x>2$ 時：

$x+x-2=2x-2\le 4\Rightarrow x\le 3$

得 $f(x)\le 4$ 的解為 $-1\le x\le 3$

(4) ╳：取 $x_1=0$，$x_2=1$

則 $f(0)=f(1)=2$

但 $x_1+x_2=1\ne 2$

(5) ╳：$\because$ 點 (h,k) 在 $y=f(x)$ 圖形上

$\therefore f(h)=|h|+|h-2|=k$

而 $f(2-h)=|2-h|+|2-h-2|=|h-2|+|h|$

$=k\ne 4-k$ (當 $k\ne 2$ 時)

即點 $(2-h,4-k)$ 不一定在 $y=f(x)$ 圖形上

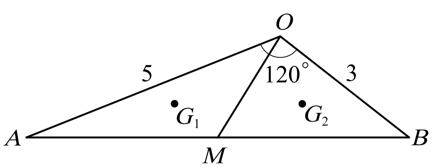
故選(1)(3)。

10. (3)(5)

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：向量拆解、分點公式、求內積的綜合應用

解析：



(1) ╳：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=5\times3\times\cos 120^\circ$

$=15\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$=-\dfrac{15}{2}$

(2) ╳：$\because \overline{AM}:\overline{MB}=1:1$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

$\because G_1$ 為$\triangle OAM$ 的重心

$\therefore \overrightarrow{OG_1}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OM}$

$=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OB}$

(3) ○：同(2)，可得 $\overrightarrow{OG_2}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

$\therefore \overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_2}$

$=\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OB}\right)+\left(\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

$=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow 3(\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_2})=2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

(4) ╳：$\overrightarrow{G_1G_2}=\overrightarrow{OG_2}-\overrightarrow{OG_1}$

$=\left(\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)-\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OB}\right)$

$=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

(5) ○：$\overrightarrow{OG_1}\cdot\overrightarrow{OG_2}$

$=\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

$=\dfrac{1}{12}|\overrightarrow{OA}|^2+\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{36}\right)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{12}|\overrightarrow{OB}|^2$

$=\dfrac{1}{12}\times5^2+\dfrac{10}{36}\times\left(-\dfrac{15}{2}\right)+\dfrac{1}{12}\times3^2$

$=\dfrac{25}{12}-\dfrac{25}{12}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{4}$

故選(3)(5)。

11. (2)(4)(5)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：分狀況討論求古典機率

解析：(1) ╳：每一格均可填入 2、3、4、5 四種點數

$\therefore P$(四格均不為 1)$=\dfrac{4^4}{6^4}=\dfrac{256}{6^4}$

(2) ○：有 2 個面為 1 點　$\therefore P$(四格均為 1)$=\dfrac{2^4}{6^4}=\dfrac{16}{6^4}$

(3) ╳：P(四格數字相異)

$=\dfrac{\overset{\text{四格均不為 1}}{4!}+\overset{\text{2、3、4、5 選 3 個和 1 一起出現}}{C_3^4}\times4!\times\overset{\text{2 個面為 1 點}}{2}}{6^4}$

$=\dfrac{24+192}{6^4}=\dfrac{216}{6^4}$

(4) ○：P(四格數字和為 18)$=\dfrac{\overset{5553}{\dfrac{4!}{3!}}+\overset{5544}{\dfrac{4!}{2!2!}}}{6^4}$

$=\dfrac{4+6}{6^4}=\dfrac{10}{6^4}$

(5) ○：

	A	$\to$	D	$\to$	B	$\to$	C	
① $A=D=1$：	2	$\times$	2	$\times$	4	$\times$	4	$=64$
② $A=D\ne1$：	4	$\times$	1	$\times$	5	$\times$	5	$=100$

P(相鄰格子數字不同且 A、D 格子數字相同)

$=\dfrac{64+100}{6^4}=\dfrac{164}{6^4}$

故選(2)(4)(5)。

12. (2)(3)(4)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：資料重新計算對平均數、標準差、相關係數的影響

解析：(1)╳：$m=r_{XY}\times\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{1}=1$

又過 $(\mu_X,\mu_Y)=(3,4)$

∴最適直線為 $y-4=1\times(x-3)\Rightarrow y=x+1$

(2)○：令 $k=x_1y_1+x_2y_2+\cdots\cdots+x_5y_5$

$r_{XY}=\dfrac{k-n\mu_X\mu_Y}{n\sigma_X\sigma_Y}\Rightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{k-5\times3\times4}{5\times1\times2}\Rightarrow k=65$

(3)○：$\mu_Z=\dfrac{2x_1+y_1+2x_2+y_2+\cdots\cdots+2x_5+y_5}{5}$

$=\dfrac{2(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_5)+(y_1+y_2+\cdots\cdots+y_5)}{5}$

$=2\times\mu_X+\mu_Y=2\times3+4=10$

(4)○：$\sigma_X^2=1^2=\dfrac{x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_5^2}{5}-3^2$

$\Rightarrow x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_5^2=50$

$\sigma_Y^2=2^2=\dfrac{y_1^2+y_2^2+\cdots\cdots+y_5^2}{5}-4^2$

$\Rightarrow y_1^2+y_2^2+\cdots\cdots+y_5^2=100$

σ_Z^2

$=\dfrac{(2x_1+y_1)^2+(2x_2+y_2)^2+\cdots\cdots+(2x_5+y_5)^2}{5}-10^2$

$=\dfrac{4(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_5^2)+4(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_5y_5)+(y_1^2+\cdots+y_5^2)}{5}$

-100

$=\dfrac{4\times50+4\times65+100}{5}-100$

$=112-100=12$

$\therefore\sigma_Z=2\sqrt{3}$

(5)╳：r_{YZ}

$=\dfrac{y_1(2x_1+y_1)+y_2(2x_2+y_2)+\cdots+y_5(2x_5+y_5)-5\times\mu_Y\times\mu_Z}{5\times\sigma_Y\times\sigma_Z}$

$=\dfrac{2(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_5y_5)+(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_5^2)-5\times4\times10}{5\times2\times2\sqrt{3}}$

$=\dfrac{2\times65+100-200}{20\sqrt{3}}$

$=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}>\dfrac{1}{2}$

故選(2)(3)(4)。

三、選填題

13. $\dfrac{2}{5}$

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：共線定理

解析：$t\overrightarrow{a}+\dfrac{1}{2}t\overrightarrow{b}=(t)\overrightarrow{a}+\left(\dfrac{3t}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{3}\overrightarrow{b}$

由共線定理：$t+\dfrac{3}{2}t=1$

$\Rightarrow\dfrac{5}{2}t=1$

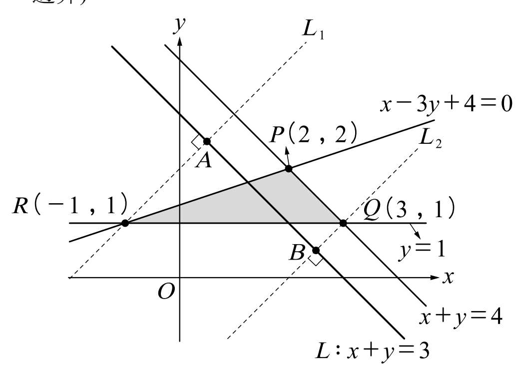
$\Rightarrow t=\dfrac{2}{5}$。

14. $2\sqrt{2}$

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：二元一次聯立不等式的圖形、平行線的距離公式

解析：繪製聯立不等式所對應的區域如下 (△PQR 的內部及邊界)：



令 L：$x+y=3(m_L=-1)$

過 R 作 $L_1\perp L$ 交 L 於 A，

過 Q 作 $L_2\perp L$ 交 L 於 B $(m_{L_1}=m_{L_2}=1)$

則 L_1：$y-1=1\times(x-(-1))$，L_2：$y-1=1\times(x-3)$

$\Rightarrow L_1$：$x-y+2=0$，L_2：$x-y-2=0$

所求即為 $\overline{AB}=d(L_1,L_2)=\dfrac{|2-(-2)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}$

$=2\sqrt{2}$。

15. 7200

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：不盡相異物的排列之應用

解析：6 題的答案為「2 同 4 異」，如 $AABCDE$：

$C^5_1\times\dfrac{6!}{2!}=5\times360=1800$

↓

A、B、C、D、E 選 1 個出現 2 次

6 題的答案為「2 同 2 同 2 異」，如 $AABBCD$：

$C^5_4\times C^4_2\times\dfrac{6!}{2!2!}=5\times6\times180=5400$

↓　↳選其中 2 個各出現 2 次

A、B、C、D、E 選 4 個出現在正確答案中

故共有 $1800+5400=7200$ 種。

16. $\dfrac{-1}{12}$

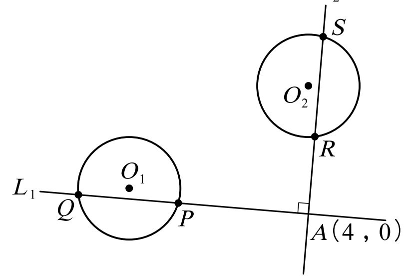
出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：直線與圓關係的進階變化

解析：$O_1(-3,1)$，$r_1=2$；$O_2(4,5)$，$r_2=2$

設 L_1 的斜率為 m，

則 L_2 的斜率為 $\dfrac{-1}{m}$ $(\because L_1\perp L_2)$



得 L_1：$y-0=m(x-4)\Rightarrow L_1$：$mx-y-4m=0$

L_2：$y-0=-\dfrac{1}{m}(x-4)\Rightarrow L_2$：$x+my-4=0$

$\because\overline{PQ}=\overline{RS}$　$\therefore d(O_1,L_1)=d(O_2,L_2)$

$\Rightarrow \dfrac{|-3m-1-4m|}{\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{|4+5m-4|}{\sqrt{1+m^2}}$

$\Rightarrow |-7m-1|=|5m|$

$\Rightarrow -7m-1=\pm 5m$

$\Rightarrow 12m=-1$ 或 $2m=-1$

$\Rightarrow m=\dfrac{-1}{12}$ 或 $\dfrac{-1}{2}$

當 $m=\dfrac{-1}{2}$ 時，

$$d(O_1, L_1)=\frac{\left|-7\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1}}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{5}>r_1$$

$\Rightarrow L_1$ 與圓 C_1 不相交，不合

故 $m=\dfrac{-1}{12}$。

17. $\dfrac{8}{3}$

出處：第二冊〈排列組合與機率〉、第三冊〈三角函數〉

目標：期望值的求法、三角函數圖形的繪製

解析：$a\sin bx=\dfrac{x}{\pi}$ 在 $0\le x\le \pi$ 的實數解個數

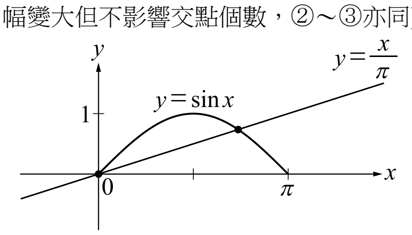
即為 $y=a\sin bx$ 與 $y=\dfrac{x}{\pi}$ 圖形在 $0\le x\le\pi$ 的交點個數

注意到：$y=a\sin bx$ 過原點，週期 $\dfrac{2\pi}{b}$，振幅 a

而 $y=\dfrac{x}{\pi}$ 過 $(0, 0)$ 與 $(\pi, 1)$

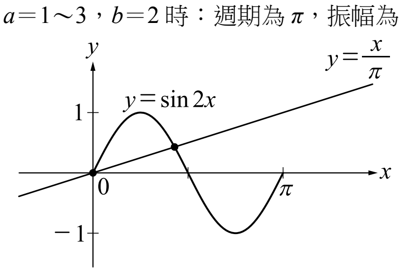
① $a=1\sim3$，$b=1$ 時：週期為 2π，振幅為 $1\sim3$

(下圖僅繪製 $a=1$，$b=1$ 的圖，當 $a=2$、3 時，振幅變大但不影響交點個數，②～③亦同)



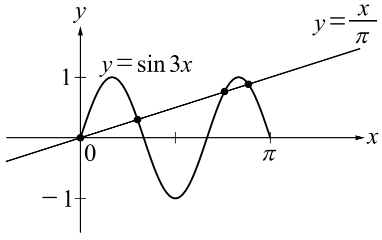
2 個交點 $\Rightarrow$ 2 個實數解

② $a=1\sim3$，$b=2$ 時：週期為 π，振幅為 $1\sim3$



2 個交點 $\Rightarrow$ 2 個實數解

③ $a=1\sim3$，$b=3$ 時：週期為 $\dfrac{2\pi}{3}$，振幅為 $1\sim3$



4 個交點 $\Rightarrow$ 4 個實數解

故實數解個數的期望值為

$2\times\dfrac{3}{3^2}+2\times\dfrac{3}{3^2}+4\times\dfrac{3}{3^2}=\dfrac{3}{3^2}\times(2+2+4)=\dfrac{8}{3}$ (個)。

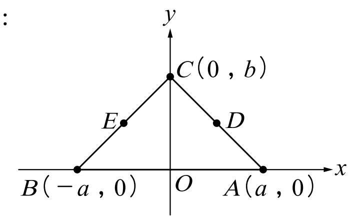
第貳部分、混合題或非選擇題

18. (4)

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：向量的坐標表示法

解析：



D 為 $\overline{CA}$ 之中點 $\Rightarrow D\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$

$\therefore \overrightarrow{BD}=\left(\dfrac{a}{2}-(-a), \dfrac{b}{2}-0\right)=\left(\dfrac{3a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$

故選(4)。

19. $\dfrac{3}{5}$

出處：第三冊〈平面向量〉

目標：利用內積處理夾角

解析：E 為 $\overline{CB}$ 之中點 $\Rightarrow E\left(\dfrac{-a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AE}=\left(\dfrac{-a}{2}-a, \dfrac{b}{2}-0\right)=\left(-\dfrac{3a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$

$\because \overline{BD}\perp\overline{AE}\quad \therefore \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AE}=0$

$\Rightarrow \dfrac{3a}{2}\cdot\left(-\dfrac{3a}{2}\right)+\dfrac{b}{2}\cdot\dfrac{b}{2}=0$

$\Rightarrow -\dfrac{9}{4}a^2+\dfrac{1}{4}b^2=0$

$\Rightarrow b^2=9a^2$

$\Rightarrow b=3a$

$\overrightarrow{CA}=(a, -b)=(a, -3a)=a(1, -3)$

$\overrightarrow{CB}=(-a, -b)=(-a, -3a)=a(-1, -3)$

$\cos\angle ACB=\dfrac{(1, -3)\cdot(-1, -3)}{|(1, -3)|\times|(-1, -3)|}$

$=\dfrac{-1+9}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=\dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow \sin\angle ACB=\dfrac{3}{5}$。

◎評分原則

E 為 $\overline{CB}$ 之中點 $\Rightarrow E\left(\dfrac{-a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AE}=\left(\dfrac{-a}{2}-a, \dfrac{b}{2}-0\right)=\left(-\dfrac{3a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$ (1 分)

$\because \overline{BD}\perp\overline{AE}\quad \therefore \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AE}=0$

$\Rightarrow \dfrac{3a}{2}\cdot\left(-\dfrac{3a}{2}\right)+\dfrac{b}{2}\cdot\dfrac{b}{2}=0$

$\Rightarrow -\dfrac{9}{4}a^2+\dfrac{1}{4}b^2=0$

$\Rightarrow b^2=9a^2$

$\Rightarrow b=3a$ (2 分)

$\overrightarrow{CA}=(a,-b)=(a,-3a)=a(1,-3)$

$\overrightarrow{CB}=(-a,-b)=(-a,-3a)=a(-1,-3)$

$$\cos\angle ACB=\frac{(1,-3)\cdot(-1,-3)}{|(1,-3)|\times|(-1,-3)|}$$

$$=\frac{-1+9}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=\frac{4}{5}\quad\text{(2 分)}$$

$\Rightarrow \sin\angle ACB=\frac{3}{5}$。　(1 分)

20. 面積最大為 6，此時半徑為 $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

出處：第一冊〈數與式〉、第二冊〈三角比〉

目標：算幾不等式求極值、利用正弦定理求三角形外接圓半徑

解析：$\overline{AE}=3\Rightarrow\frac{9}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2=9\Rightarrow 9a^2+b^2=36$

$\triangle ABC$ 的面積為 $\frac{1}{2}\times 2a\times b=ab$

由算幾不等式：

$$\frac{9a^2+b^2}{2}\geq\sqrt{9a^2\cdot b^2}\Rightarrow\frac{36}{2}\geq 3ab\Rightarrow 6\geq ab$$

$\therefore\triangle ABC$ 的最大面積為 6

“$=$”成立於：$9a^2=b^2$，又 $9a^2+b^2=36$

$\therefore 9a^2=b^2=18\Rightarrow a=\sqrt{2}$，$b=3\sqrt{2}$

注意到 $b=3a$，由 19. 知 $\sin\angle ACB=\frac{3}{5}$

在 $\triangle ABC$ 中，利用正弦定理：

$$\frac{2a}{\sin\angle ACB}=2R\Rightarrow\frac{2\sqrt{2}}{\frac{3}{5}}=2R$$

$\Rightarrow R=\frac{5\sqrt{2}}{3}$。

◎評分原則

$\overline{AE}=3\Rightarrow\frac{9}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2=9\Rightarrow 9a^2+b^2=36$

$\triangle ABC$ 的面積為 $\frac{1}{2}\times 2a\times b=ab$　(1 分)

由算幾不等式：

$$\frac{9a^2+b^2}{2}\geq\sqrt{9a^2\cdot b^2}\Rightarrow\frac{36}{2}\geq 3ab\Rightarrow 6\geq ab$$

$\therefore\triangle ABC$ 的最大面積為 6　(2 分)

“$=$”成立於：$9a^2=b^2$，又 $9a^2+b^2=36$

$\therefore 9a^2=b^2=18\Rightarrow a=\sqrt{2}$，$b=3\sqrt{2}$　(1 分)

注意到 $b=3a$，由 19. 知 $\sin\angle ACB=\frac{3}{5}$　(1 分)

在 $\triangle ABC$ 中，利用正弦定理：

$$\frac{2a}{\sin\angle ACB}=2R\Rightarrow\frac{2\sqrt{2}}{\frac{3}{5}}=2R$$

$\Rightarrow R=\frac{5\sqrt{2}}{3}$。　(1 分)