北北基高中 115 年(114 學年度)
高三上 第三次學測模擬考數學　數 A 試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題

一、單選題

1. 坐標平面上，從$(0,0)$、$(1,0)$、$(0,1)$、$(2,0)$、$(1,1)$、$(0,2)$這六個點中隨機選取相異兩個點（假設每個點被選到的機會均等），則選取兩點的距離大於 1 的機率為何？
(1)$\frac{1}{3}$　(2)$\frac{2}{3}$　(3)$\frac{1}{5}$　(4)$\frac{2}{5}$　(5)$\frac{3}{5}$

答：(5)

解：$n(S)=C_2^6=15$

$d=1\ \ 1\ \ 2\ \ \sqrt{2}\ \ 2\ \ \sqrt{2}\ \ 1\ \ 1\ \ \sqrt{5}\ \ \sqrt{5}\ \ 1\ \ 1\ \ \sqrt{2}\ \ \sqrt{8}\ \ \sqrt{2}$

$n(A)=9\ \Rightarrow P(A)=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$

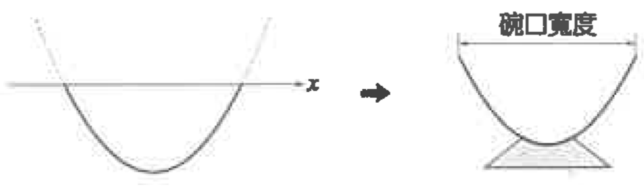
2. 設$\langle a_n \rangle$為一等比數列，且前n項總和記為S_n。若$a_4=\frac{1}{8}$、$a_7=\frac{1}{64}$，則所有點(n,S_n)（n為正整數）會在下列哪一個選項的函數圖形上？
(1) $y=-2^x+\frac{5}{2}$　(2) $y=-2^{-x}+\frac{3}{2}$　(3) $y=-2^{1-x}+2$
(4) $y=2^{x-1}-\frac{1}{2}$　(5) $y=2^x-\frac{3}{2}$

答：(3)

解：$a_4=\frac{1}{8}$，$a_7=\frac{1}{16}$ $\Rightarrow r=\frac{1}{2}$，$a_1=1$ $\Rightarrow S_n=\dfrac{1\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

則$\left(n,2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]\right)\in y=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}=2-2^{1-x}$

3. 某工廠以電腦程式繪製了拋物線$y=2x^2+(2k+2)x+(2k-1)$的圖形，並取$y\le 0$的部分，設計成一款側面為拋物線形狀的碗，如下圖所示。



工程師正在測試不同的實數k值對碗口寬度的影響，試問當k值為何時，碗口寬度會最小？
(1) -1　(2) 0　(3) 1　(4) 2　(5) 3

答：(3)

解：碗口寬度$=\frac{1}{2}\sqrt{(2k+2)^2-4\times2\times(2k-1)}=\frac{1}{2}\sqrt{4(k-1)^2+8}$

當$k=1$時有$Max=\sqrt{2}$

4. 四邊形$ABCD$中，$\overline{AB}=3$、$\overline{AC}=2$、$\overline{AD}=1$，且$\angle BAD=120^\circ$。試求四邊形$ABCD$面積的最大可能值為何？

(1)$\sqrt{10}$　(2)$\sqrt{11}$　(3)$\sqrt{12}$　(4)$\sqrt{13}$　(5)$\sqrt{14}$

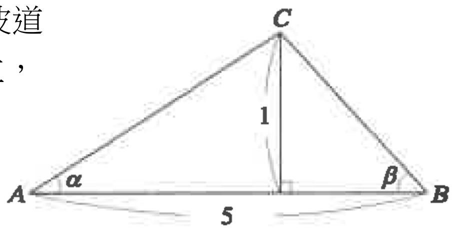
答：(4)　此題佳

解：令$\angle BAC=\theta\ \Rightarrow \angle DAC=120^\circ-\theta$

$$ABCD\text{面積}=\frac{1}{2}\times3\times2\times\sin\theta+\frac{1}{2}\times2\times1\times\sin(120^\circ-\theta)$$

$$=3\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{7}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\le\sqrt{13}$$

5. 如右略圖，同一水平線上兩地點A與B由坡道$\overline{AC}$與坡道$\overline{CB}$連接，坡道頂點為C。設A、B間的距離為 5 單位，C點的高度為 1 單位。令$\angle CAB=\alpha$、$\angle CBA=\beta$、$\tan\alpha=x$。若一臺小車在坡道上從A行駛至B，在上坡路段$\overline{AC}$的行駛速度為每分鐘$\cos\alpha$單位；在下坡路段$\overline{CB}$的行駛速度為每分鐘$\frac{1}{\cos\beta}$單位，則小車在坡道上從A行駛至B的時間為下列哪一個選項？



(1)$x+5$分鐘　(2)$5x+1$分鐘　(3)$\frac{x}{5x+1}$分鐘

(4)$\frac{x}{x+5}$分鐘　(5)$x+10+\frac{1}{5x-1}$分鐘

答：(1)

解：$\cot\alpha+\cot\beta=5$，$\overline{AC}=\csc\alpha$，$\overline{BC}=\csc\beta$

又$\tan\alpha=x\ \Rightarrow \sin\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$，$\cot\alpha=\frac{1}{x}$

$$\text{時間}=\frac{\csc\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\csc\beta}{\frac{1}{\cos\beta}}=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{x^2+1}{x}+5-\frac{1}{x}=x+5$$

6. 設正實數x,y,z,k滿足$2+\log_2 x=4+\log_4 y=8+\log_8 z=k$，且$x<y<z$，則下列選項何者是可能的$k$值？

(1)10　(2)15　(3)$\log114$　(4)$\log_2 2025$　(5)π^π

答：(5)

解：$x=2^{k-2}<y=4^{k-4}<z=8^{k-8}$

$\Rightarrow 2^{k-2}<2^{2k-8}<2^{3k-24}\ \Rightarrow k-2<2k-8<3k-24\ \Rightarrow k>16$

(1) 10　(2) 15　(3) 2　(4) 10　(5) 36

二、多選題

7. 已知實係數三次多項式 $f(x)$ 除以 $(x-3)^3$ 的餘式為一次多項式 $g(x)$，試選出正確的選項。
(1) $f(3)=g(3)$
(2) $y=f(x)$ 的圖形在 $x=3$ 附近會近似於直線 $y=g(x)$
(3) $y=f(x)$ 圖形的對稱中心為 $(3,0)$
(4) $y=f(x)-g(x)$ 圖形的對稱中心為 $(3,0)$
(5) $y=f(x)$ 的圖形與 $y=g(x)$ 的圖形有三個交點

答：(1)(2)(4)

解： $f(x)=(x-3)^3\ q+g(x)$， $g(x)=ax+b$
(1) $f(3)=g(3)=3a+b$
(2)一次近似 $y=g(x)=ax+b$
(3) $f(x)=(x-3)^3\ q+a(x-3)+(b+3a)$，對稱中心 $(3,g(3))$
(4) $f(x)-g(x)=(x-3)^3\ q+0$，對稱中心 $(3,0)$
(5) $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 僅交於 $(3,0)$ 一點

8. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 的一般項為 $a_n=n^2-10n+9$（n 為正整數），試選出正確的選項。
(1)數列 $\langle a_n \rangle$ 中，恰有 9 項小於 0
(2) a_{100} 為 39 的倍數
(3)數列 $\langle a_n \rangle$ 中，值最小的為 a_5
(4) $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{10}, a_{11}$ 的中位數為 -15
(5) $|a_1|+|a_2|+\cdots\cdots+|a_{10}|+|a_{11}|>120$

答：(2)(3)

解：(1) $a_n=n^2-10n+9<0 \ \Rightarrow 1<n<9 \ \Rightarrow n=2,3,4,\cdots,8$ 共 7 項
(2) $a_{100}=100^2-1000+9=9009=39\times 231$
(3) $a_n=(n-5)^2-16$，當 $n=5$ 有 $Min=-16$
(4) $a_5<a_4=a_6<a_3=a_7<a_2=a_8<a_1=a_9<a_{10}<a_{11}$
故中位數 $a_2=a_8=-7$
(5) $\sum_{n=1}^{9} a_n=\sum_{n=1}^{9}\left(n^2-10n+9\right)=\frac{9\times 10\times 19}{6}-10\times\frac{9\times 10}{2}+9\times 9=-84$
$a_{10}=9$， $a_{11}=20$，所求 $=84+9+20=113<120$

9. 已知 $f(x)=|x|+|x-a|$，其中 a 為正實數，若 $f(x)$ 的最小值為 2，試選出正確的選項。
(1) $a=2$
(2) $f(x)$ 的最大值為 10
(3)不等式 $f(x)\le 4$ 的解為 $-1\le x\le 3$
(4)若 x_1, x_2 是兩相異實數且 $f(x_1)=f(x_2)$，則 $x_1+x_2=2$
(5)若點 (h,k) 在 $y=f(x)$ 的圖形上，則點 $(2-h,4-k)$ 也在 $y=f(x)$ 的圖形上

答：(1)(3)

解：①若 $x>a$ ： $f(x)=x+x-a=2x-a>2a-a=a$

②若 $0\le x\le a$ ： $f(x)=x+a-x=a$

③若 $x<0$ ： $f(x)=-x+a-x=a-2x>a$（$\because x<0\ \Rightarrow -2x>0$）

由①②③知，$f(x)\ge a$ 且當 $0\le x\le a$ 時，$f(x)$ 有最小值為 a

(1) ○：$\because f(x)$ 的最小值為 2　　$\therefore a=2$

(2) ×：$f(x)$ 沒有最大值

(3) ○：$f(x)\le 4\ \Rightarrow |x|+|x-2|\le 4$

當 $x<0$ 時：$-x+(2-x)=2-2x\le 4\ \Rightarrow x\ge -1$

當 $0\le x\le 2$ 時：$x+(2-x)=2\le 4$，合

當 $x>2$ 時：$x+x-2=2x-2\le 4\ \Rightarrow x\le 3$

得 $f(x)\le 4$ 的解為 $-1\le x\le 3$

(4) ×：取 $x_1=0$，$x_2=1$，則 $f(0)=f(1)=2$　但 $x_1+x_2=1\ne 2$

(5) ×：$\because$ 點 (h,k) 在 $y=f(x)$ 圖形上　　$\therefore f(h)=|h|+|h-2|=k$

而 $f(2-h)=|2-h|+|2-h-2|=|h-2|+|h|=k\ne 4-k$（當 $k\ne 2$ 時）

即點 $(2-h,4-k)$ 不一定在 $y=f(x)$ 圖形上

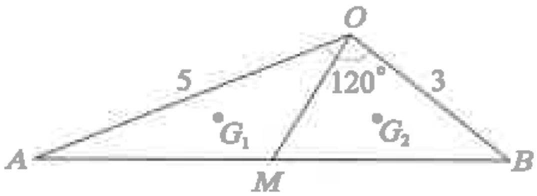
10. ΔOAB 中，$\overline{OA}=5$，$\overline{OB}=3$，$\angle AOB=120°$，設 M 為 $\overline{AB}$ 的中點，ΔOAM 與 ΔOMB 的重心分別為 G_1 與 G_2，試選出正確的選項。

(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{15}{2}$　(2) $\overrightarrow{OG_1}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$　(3) $3\left(\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_2}\right)=2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$

(4) $\overrightarrow{G_1G_2}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$　(5) $\overrightarrow{OG_1}\cdot\overrightarrow{OG_2}=\dfrac{3}{4}$

答：(3)(5)

解：



(1) ×：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=5\times3\times\cos120°=15\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{15}{2}$

(2) ×：$\overrightarrow{OG_1}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OB}$

(3) ○：$\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_2}=\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OB}\right)+\left(\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow 3\left(\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_2}\right)=2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$

(4) ×：$\overrightarrow{G_1G_2}=\overrightarrow{OG_2}-\overrightarrow{OG_1}=\left(\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)-\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OB}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

(5) ○：$\overrightarrow{OG_1}\cdot\overrightarrow{OG_2}=\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

$$=\frac{1}{12}\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{36}\right)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{12}\left|\overrightarrow{OB}\right|^2$$

$$=\frac{1}{12}\times 5^2+\frac{10}{36}\times\left(-\frac{15}{2}\right)+\frac{1}{12}\times 3^2=\frac{25}{12}-\frac{25}{12}+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

11.有一種特製的公正骰子，其六個面上的點數分別為 1、1、2、3、4、5。今連續投擲此骰子四次，並將第一、二、三、四次所得的點數依序填入右圖 A 、 B 、 C 、 D 的四個格子中，試選出正確的選項。

A	B
C	D

(1)四格填入的數字均不為 1 的機率為 $\dfrac{24}{6^4}$　(2)四格均填入數字 1 的機率為 $\dfrac{16}{6^4}$

(3)四格數字均相異的機率為 $\dfrac{120}{6^4}$　(4)四格數字的和為 18 的機率為 $\dfrac{10}{6^4}$

(5)相鄰的格子填入的數字不同且 A 、 D 填入相同數字之機率為 $\dfrac{164}{6^4}$

答：(2)(4)(5)

解：(1) ×：每一格均可填入 2、3、4、5 四種點數　$\therefore P\left(\text{四格均不為}1\right)=\dfrac{4^4}{6^4}=\dfrac{256}{6^4}$

(2) ○：有 2 個面為 1 點　$\therefore P\left(\text{四格均為}1\right)=\dfrac{2^4}{6^4}=\dfrac{16}{6^4}$

(3) ×：$P\left(\text{四格數字相異}\right)=\dfrac{\overset{\text{四格均不為 1}}{4!}+\overset{\text{2、3、4、5 選 3 個和 1 一起出現}}{C^4_3}\times 4!\times\overset{\text{2 個面為 1 點}}{2}}{6^4}=\dfrac{24+192}{6^4}=\dfrac{216}{6^4}$

(4) ○：$P\left(\text{四格數字和為}18\right)=\dfrac{\overset{5553}{\dfrac{4!}{3!}}+\overset{5544}{\dfrac{4!}{2!2!}}}{6^4}=\dfrac{4+6}{6^4}=\dfrac{10}{6^4}$

(5) ○：① $A=D=1$： $\overset{A\to D\to B\to C}{2\times 2\times 4\times 4}=64$

② $A=D\neq 1$： $4\times 1\times 5\times 5=100$

$$P\left(\text{相鄰格子數字不同且}A\text{、}D\text{ 格子數字相同}\right)=\frac{64+100}{6^4}=\frac{164}{6^4}$$

12. 五位學生參與某次學科能力測驗，本次測驗共有數學(X)與物理(Y)兩個科目，他們的成績及相關統計數據如下表所示：

科目＼成績＼學生	甲	乙	丙	丁	戊	平均	標準差
數學 X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	3	1
物理 Y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	4	2
X 與 Y 的相關係數為 $\frac{1}{2}$							

今將數學與物理成績採用加權計算總分得成績 Z，其 $z_i = 2x_i + y_i$（$i=1,2,3,4,5$），試選出正確的選項。

(1) Y 對 X 的最適直線方程式為 $y=\frac{1}{4}x+\frac{15}{4}$

(2) $x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4+x_5y_5=65$

(3)成績 Z 的平均數為 10

(4)成績 Z 的標準差為 $2\sqrt{3}$

(5)成績 Z 與 Y 的相關係數小於 $\frac{1}{2}$

答：(2)(3)(4)此題佳

解：(1) ×：$m=r_{XY}\times\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{1}=1$，又過$(\mu_X,\mu_Y)=(3,4)$

∴最適直線為 $y-4=1\times(x-3) \Rightarrow y=x+1$

(2) ○：$r_{XY}=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\mu_X\mu_Y}{5\sigma_X\sigma_Y} \Rightarrow \frac{1}{2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\times3\times4}{5\times1\times2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{5}x_iy_i=65$

(3) ○：$\mu_Z=2\times\mu_X+\mu_Y=2\times3+4=10$

(4) ○：$\sigma_X=1=\sqrt{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i^2-3^2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{5}x_i^2=50$

$\sigma_Y=2=\sqrt{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}y_i^2-4^2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{5}y_i^2=100$

$\sigma_Z=\sqrt{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(2x_i+y_i)^2-10^2}=\sqrt{\frac{1}{5}\left[4\sum_{i=1}^{5}x_i^2+\sum_{i=1}^{5}y_i^2+4\sum_{i=1}^{5}x_iy_i\right]-10^2}$

$=\sqrt{\frac{1}{5}[4\times50+100+4\times65]-100}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

(5) ×：$r_{YZ}=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}y_iz_i-5\times\mu_Y\times\mu_Z}{5\times\sigma_Y\times\sigma_Z}=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}y_i(2x_i+y_i)-5\times\mu_Y\times\mu_Z}{5\times\sigma_Y\times\sigma_Z}$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{5}2\left(x_i y_i\right)+\sum_{i=1}^{5}y_i^2-5\times4\times10}{5\times2\times2\sqrt{3}}=\frac{2\times65+100-200}{20\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{1}{2}$$

三、選填題

13.坐標平面上，已知兩非零向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 不平行，若 $\overrightarrow{a}$、$\frac{1}{3}\overrightarrow{b}$、$t\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}t\overrightarrow{b}$ 三向量的始點相同且終點在同一直線上，則實數 t 之值為________。（化為最簡分數）

答：$\frac{2}{5}$

解：$t\overrightarrow{a}+\frac{3t}{2}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{b}\right)$ 與 $\overrightarrow{a}$、$\frac{1}{3}\overrightarrow{b}$ 終點共線 $\Rightarrow t+\frac{3t}{2}=1\ \Rightarrow t=\frac{2}{5}$

14.在坐標平面上，過點 P 作直線 L 的垂線所得的垂足稱為點 P 在直線 L 上的投影點。已知聯立不等式 $\begin{cases}x-3y+4\geq0\\x+y\leq4\\y\geq1\end{cases}$ 所對應的區域中，所有點在直線 $x+y=3$ 上的投影點形成一線段，則此線段的長度為________。（化為最簡根式）

答：$2\sqrt{2}$

解：限制範圍之端點為 $(3,1)$、$(-1,1)$、$(2,2)$

所圍三角形在 $x+y=3$ 之投影線段端點 $\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$、$\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$，故投影長 $=2\sqrt{2}$

解：限制範圍之端點為 $A(3,1)$、$B(-1,1)$、$C(2,2)$

$x+y=3$ 的方向向量 $\overrightarrow{L}=(1,-1)$、端點向量 $\overrightarrow{AB}=(-4,0)$

所求投影長 $=\left|4\times\frac{-4+0}{4\times\sqrt{2}}\right|=2\sqrt{2}$

15.一數學試卷有 6 題單選題（每題均有 A、B、C、D、E 五個選項，其中一個為正確答案），命題教師為了避免 6 題都猜一樣答案的學生得分過高，因此依以下原則設計正確答案：

(I)選項 A、B、C、D、E 至多只有一個不出現在正確答案中。

(II)正確答案為同一個選項的，至多為兩題。

例如，6 題的正確答案依序為 $BCADAB$ 或 $BCAEAD$ 皆是符合(I)(II)原則的；而 $BACCCD$ 或 $AACEEC$ 皆為不符合的。試問此試卷 6 題單選題的正確答案之次序有________種不同的可能。

答：7200

解：6 題的答案為「2 同 4 異」，如 $AABCDE$：$\underbrace{C_1^5}_{A,B,C,D,E\text{ 選 1 個出現 2 次}}\times\frac{6!}{2!}=5\times360=1800$

6 題的答案為「2 同 2 同 2 異」，如 $AABBCD$：$\underbrace{C_4^5}_{A、B、C、D、E\text{ 選 4 個出現在正確答案中}}\times\underbrace{C_2^4}_{\text{選其中 2 個各出現 2 次}}\times\frac{6!}{2!2!}=5\times6\times180=5400$

故共有$1800+5400=7200$種

16. 坐標平面上，已知圓$C_1:(x+3)^2+(y-1)^2=4$，圓$C_2:(x-4)^2+(y-5)^2=4$及點$A(4,0)$。設直線L_1過點A且與圓C_1交於P、Q兩點，直線L_2亦過點A且與圓C_2交於R、S兩點。若L_1垂直L_2且$\overline{PQ}=\overline{RS}$，則直線$L_1$的斜率為________。（化為最簡分數）

$\boxed{答}$：$\dfrac{-1}{12}$ 此題佳

$\boxed{解}$：$L_1: y=m(x-4)$，即$mx-y-4m=0$

$L_2: y=-\dfrac{1}{m}(x-4)$，即$x+my-4=0$

$$d((-3,1),L_1)=d((4,5),L_2) \Rightarrow \frac{|-7m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|5m|}{\sqrt{m^2+1}}$$

$\Rightarrow m=-\dfrac{1}{12}$或$-\dfrac{1}{2}$（不合，此時$d=\sqrt{5}>r=2$）

17. 一袋中裝有編號分別為 1、2、3 的三顆球。隨機抽取一球，將球放回後，再隨機抽取一球，假設每球被抽取的機會均等，若兩次取球的編號依序為a、b，則方程式$a\sin bx=\dfrac{x}{\pi}$在$0\le x\le \pi$內實數解個數的期望值為________個。（化為最簡分數）

$\boxed{答}$：$\dfrac{8}{3}$

$\boxed{解}$：當$b=1$，$y=\sin bx$週期2π。在$0\le x\le \pi$，與$y=\dfrac{1}{a\pi}x$有 2 交點 $\Rightarrow a=1,2,3$

當$b=2$，$y=\sin bx$週期π。在$0\le x\le \pi$，與$y=\dfrac{1}{a\pi}x$有 2 交點 $\Rightarrow a=1,2,3$

當$b=3$，$y=\sin bx$週期$\dfrac{2\pi}{3}$。在$0\le x\le \pi$，與$y=\dfrac{1}{a\pi}x$有 4 交點 $\Rightarrow a=1,2,3$

$$E(X)=2\times\frac{1\times 3}{3^2}+2\times\frac{1\times 3}{3^2}+4\times\frac{1\times 3}{3^2}=\frac{8}{3}$$

第貳部分：混合題或非選擇題

18-20 題為題組

坐標平面上三相異點$A(a,0)$、$B(-a,0)$、$C(0,b)$，其中a、b為正實數。若D、E分別為線段$\overline{CA}$與$\overline{CB}$的中點，試回答下列問題。

18. 向量$\overrightarrow{BD}$的坐標表示法為下列哪一個選項？（單選題）

(1) (a,b)　(2) $\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{b}{2}\right)$　(3) $\left(-\dfrac{a}{2},\dfrac{b}{2}\right)$　(4) $\left(\dfrac{3a}{2},\dfrac{b}{2}\right)$　(5) $\left(-\dfrac{3a}{2},\dfrac{b}{2}\right)$

$\boxed{答}$：(4)

$\boxed{解}$：$D\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{b}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{BD}=\left(\dfrac{3a}{2},\dfrac{b}{2}\right)$

19.若$\overline{BD}$垂直$\overline{AE}$，試求$\sin\angle ACB$。

答：$\dfrac{3}{5}$

解：$E\left(-\dfrac{a}{2},\dfrac{b}{2}\right)$ $\Rightarrow \overrightarrow{AE}=\left(-\dfrac{3a}{2},\dfrac{b}{2}\right)$

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=-\dfrac{9}{4}a^2+\dfrac{b^2}{4}=0$ $\Rightarrow b^2=9a^2$

$\cos\angle ACB=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=\dfrac{(a-b)\cdot(-a-b)}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{-a^2+b^2}{a^2+b^2}=\dfrac{8a^2}{10a^2}=\dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow \sin\angle ACB=\dfrac{3}{5}$

20.若$\overline{AE}=3$，試求ΔABC面積的最大值，及此時ΔABC的外接圓半徑。

答：面積最大為 6，此時半徑為$\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$

解：$\overline{AE}=\sqrt{\dfrac{9a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}}=3$ $\Rightarrow 9a^2+b^2=36$

又$9a^2+b^2\geq 2\sqrt{9a^2b^2}=6ab$ $\Rightarrow ab\leq 6$

ΔABC面積$=\dfrac{2a\times b}{2}=ab\leq 6$

等號成立於$9a^2=b^2=18$ $\Rightarrow a=\sqrt{2}$，$b=3\sqrt{2}$

故ΔABC外接圓半徑$=\dfrac{\left(2\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{5}\right)}{4\times 6}=\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$