全國公私立高級中學114學年度學科能力測驗第三次聯合模擬考試

數學 A 考科解析

考試日期：114 年 10 月 29~30 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13-1	14-1	14-2
1	3	2	4	5	2	125	145	25	125	14	245	6	1	2
14-3	14-4	15-1	15-2	16-1	16-2	17-1	17-2	18	19	20				
2	4	1	6	6	2	3	2	2						

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. 【測驗目標】常用對數

【解析】因為 $m=6\times 10!=2^9\times 3^5\times 5^2\times 7$，

所以 $\log m=\log 2^9\times 3^5\times 5^2\times 7\approx 7.3376=7+0.3376$，

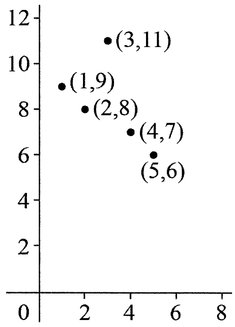
$\Rightarrow m\fallingdotseq 10^{7.3376}=10^{0.3376}\times 10^7$，因 $2<10^{0.3376}<3$，

故選(1)。

2. 【測驗目標】相關係數

【解析】在坐標平面上描出五點，

可知刪去 (3 , 11) 後留下的四點最接近一條直線，



故選(3)。

3. 【測驗目標】乘法公式與實數

【解析】$x-\dfrac{1}{x}=2\sqrt{2}\Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=(x-\dfrac{1}{x})^2+2=8+2=10$

$\Rightarrow x^4+\dfrac{1}{x^4}=(x^2+\dfrac{1}{x^2})^2-2=100-2=98$，

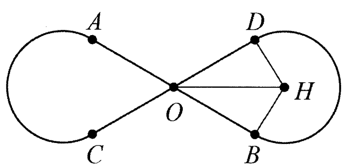
又因為 $x>1$，所以 $0<\dfrac{1}{x^4}<1$，

$97<98-\dfrac{1}{x^4}<98\Rightarrow 97<x^4<98\Rightarrow x^4$ 的整數部分為 97，

故選(2)。

4. 【測驗目標】扇形面積公式

【解析】如圖，H 為圓心，



由題意可知 $\angle DOH=30°$、$\angle ODH=90°$、$\overline{OD}=3$，

故半徑 $\overline{DH}=\sqrt{3}$、$\angle DHB=120°$，

所以右半面積為 $\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 3\times 2+\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{3})^2\times\dfrac{4\pi}{3}=3\sqrt{3}+2\pi$，

所求為 $2(3\sqrt{3}+2\pi)=6\sqrt{3}+4\pi$，

故選(4)。

5. 【測驗目標】內積的應用

【解析】設直線 L_1 與直線 L_2 的夾角為 θ，由 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 垂直，

且 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ 得 $(4\vec{a}+\vec{b})\cdot(4\vec{a}-\vec{b})=16|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=15$，

$|4\vec{a}+\vec{b}|^2=16|\vec{a}|^2+8\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=17$ (因為 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$)

$\Rightarrow |4\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{17}$，

$|4\vec{a}-\vec{b}|^2=16|\vec{a}|^2-8\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=17$ (因為 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$)

$\Rightarrow |4\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{17}$，

則 $|\cos\theta|=\left|\dfrac{(4\vec{a}+\vec{b})\cdot(4\vec{a}-\vec{b})}{|4\vec{a}+\vec{b}||4\vec{a}-\vec{b}|}\right|=\dfrac{15}{\sqrt{17}\sqrt{17}}=\dfrac{15}{17}$

$\Rightarrow \sin\theta=\dfrac{8}{17}$ 。

故選(5)。

＜另解＞

取 $\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(0,1)$

$\Rightarrow L_1, L_2$ 的法向量分別為 (4 , 1)、(4 , −1)，

設 L_1, L_2 之夾角為 θ，其中 $0\le\theta<\pi$

$\Rightarrow \cos\theta=\pm\dfrac{(4,1)\cdot(4,-1)}{\sqrt{17}\sqrt{17}}=\pm\dfrac{15}{17}\Rightarrow \sin\theta=\dfrac{8}{17}$ 。

故選(5)。

6. 【測驗目標】正弦函數與餘弦函數的圖形

【解析】$\sin(x^2)+\cos(x^2)=0\Rightarrow \sin(x^2)=-\cos(x^2)$

$\Rightarrow x^2=\dfrac{-\pi}{4}+k\pi$，$k\in N$，

因為 $0\le x\le 2\pi\Rightarrow x^2\le 4\pi^2\Rightarrow \dfrac{-\pi}{4}+k\pi\le 4\pi^2\Rightarrow k\le 4\pi+\dfrac{1}{4}$，

所以 $k=1,2,3,\cdots,12$，共 12 個，

因此方程式 $\sin(x^2)+\cos(x^2)=0$ 有 12 個實根。

故選(2)。

二、多選題

7. 【測驗目標】一、二維數據分析

【解析】

(1) ○：所有資料皆正數，所以眾數、中位數皆為正數，資料和的平均亦為正數。

(2) ○：資料標準差為零，表示每一筆資料皆相等，平均數、眾數、中位數皆相等。

(3) ×：例如：A：−10 , 10，B：5 , 6，A 的全距 > B 的全距，但 A 的平均數 (0) < B 的平均數 (5.5)。

(4) ×：若相關係數為零，只表示兩組資料沒有線性相關，可能有其他曲線相關。

(5) ○：若最適直線的斜率為 $m=r\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$ 為正數，

σ_y、σ_x 分別表示資料 Y 與 X 的標準差，

則其相關係數 r 為正數。

故選(1)(2)(5)。

8. 【測驗目標】三次多項式、高次不等式

【解析】

(1) ○：P 為 A、B 中點，故 $P=\dfrac{A+B}{2}=(1,-1)$ 。

(2) ×：設 $y=f(x)=a(x-1)^3+b(x-1)-1$，

$A(3,7)$ 代入得 $8a+2b=8$……①

$C(4,26)$ 代入得 $27a+3b=27$……②

解①②得 $a=1$，$b=0$

$\Rightarrow f(x)=(x-1)^3-1=x^3-3x^2+3x-2$，

故 $y=f(x)$ 的廣域特徵近似於 $y=x^3$。

(3) ×：承(2)，$y=f(x)$ 在 $x=0$ 附近的局部特徵近似於 $y=3x-2$。

(4) ○：$f(2)=(2-1)^3-1=0$。

(5) ○：$f(x)=(x-1)^3-1$

$=(x-1-1)[(x-1)^2+(x-1)+1]$

$=(x-2)(x^2-x+1)$，

故 $f(x)\times f(x-2)\le 0$

$\Rightarrow (x-2)(x^2-x+1)(x-2-2)[(x-2)^2-(x-2)+1]\le 0$

$\Rightarrow (x-2)(x-4)(x^2-x+1)(x^2-5x+7)\le 0$

$\Rightarrow (x-2)(x-4)\le 0 \Rightarrow 2\le x\le 4$。

故選(1)(4)(5)。

9. 【測驗目標】算幾不等式、正弦與餘弦的疊合、柯西不等式

【解析】

(1) ×：因為 $x^2+2>0$，由算幾不等式得 $(x^2+2)+\dfrac{1}{x^2+2}\ge 2$，

等號成立時，$(x^2+2)=\dfrac{1}{x^2+2}\Rightarrow (x^2+2)=\pm 1$，

不存在這樣的實數 x，故 $(x^2+2)+\dfrac{1}{x^2+2}>2$，

$(x^2+2)+\dfrac{1}{x^2+2}$ 最小值不為 2。

(2) ○：因為 2^x 與 2^{-x} 皆大於 0，由算幾不等式得 $2^x+2^{-x}\ge 2$，

等號成立時，$2^x=2^{-x}\Rightarrow x=0$，

所以 2^x+2^{-x} 的最小值為 2。

(3) ×：由正弦與餘弦的疊合，

$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$

$\Rightarrow -\sqrt{2}\le \sin x+\cos x\le \sqrt{2}$，

所以 $\sin x+\cos x$ 的最小值為 $-\sqrt{2}$。

(4) ×：由三角不等式：

$|x+1|+|x-3|=|x+1|+|3-x|\ge|(x+1)+(3-x)|=4$，

等號成立時，$-1\le x\le 3$，所以最小值為 4。

(5) ○：點 (a,b) 為直線 $x+y=2$ 上的動點 $\Rightarrow a+b=2$，

由柯西不等式 $(a^2+b^2)(1^2+1^2)\ge(a+b)^2=4$

$\Rightarrow a^2+b^2\ge 2$，等號成立時 $a=b=1$。

故選(2)(5)。

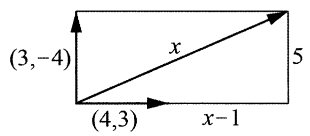
10. 【測驗目標】正射影

【解析】

(1) ○：$|(3,-4)|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

(2) ○：$(4,3)\cdot(3,-4)=0\Rightarrow (4,3)\perp(3,-4)$

(3) ×：設 $|\vec{u}|=x$，如下圖可知 $x^2=(x-1)^2+5^2\Rightarrow x=13$。



(4) ×：$\vec{u}=\dfrac{12}{5}(4,3)+(3,-4)=(\dfrac{63}{5},\dfrac{16}{5})$。

(5) ○：$\vec{u}$ 在向量 $(-1,8)$ 方向的正射影長為

$\dfrac{|(\frac{63}{5},\frac{16}{5})\cdot(-1,8)|}{|(-1,8)|}=\dfrac{\sqrt{65}}{5}$。

故選(1)(2)(5)。

11. 【測驗目標】內積的性質

【解析】設 $\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$，

(1) ○：$\because \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=-7 \quad \therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=7$。

(2) ×：$\because \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-5=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-|\overrightarrow{AB}|^2$

$\therefore |\overrightarrow{AB}|^2=7+5=12 \quad \therefore c=\sqrt{12}$。

(3) ×：$\because \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=-6=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot(-\overrightarrow{AC})=-|\overrightarrow{AC}|^2+7$

$\therefore |\overrightarrow{AC}|^2=7+6=13 \quad \therefore b=\sqrt{13}$。

代回 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=7=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}bc=\dfrac{13+12-a^2}{2}$

$\Rightarrow a=\sqrt{11}$，故三邊長皆滿足：

任兩邊的平方和大於第三邊的平方，

所以三角形為銳角三角形。

(4) ○：三角形 ABC 面積

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB})^2}=\dfrac{\sqrt{107}}{2}$。

(5) ×：設 $\overline{BC}$ 邊上的中線為 $\overline{AD}$，長度為 x，

利用餘弦定理：$\cos ADB=-\cos ADC$，

$$\frac{x^2+(\frac{\sqrt{11}}{2})^2-(\sqrt{12})^2}{2\cdot\frac{\sqrt{11}}{2}\cdot x}=-\frac{(\frac{\sqrt{11}}{2})^2+x^2-(\sqrt{13})^2}{2\cdot\frac{\sqrt{11}}{2}\cdot x}$$

$\Rightarrow x=\sqrt{\dfrac{39}{4}}=\dfrac{\sqrt{39}}{2}$。

故選(1)(4)。

12. 【測驗目標】正弦定理、餘弦定理

【解析】

(1) ×：$\sin\angle BAC=\sqrt{1-\cos^2\angle BAC}=\dfrac{9}{10}$。

(2) ○：由正弦定理可知 $2\overline{OB}=\dfrac{50}{\sin\angle BAC}\Rightarrow \overline{OB}=\dfrac{250}{9}=\overline{OC}$。

(3) ×：取 $\overline{BC}$ 中點為 D，則 $\overline{OD}\perp\overline{BC}$，且 $\angle BOD=\angle COD$，

所以 $\sin\angle BOD=\dfrac{25}{\frac{250}{9}}=\dfrac{9}{10}$，$\cos\angle BOD=\dfrac{\sqrt{19}}{10}$，

故 $\sin\angle BOC=2\times\dfrac{9}{10}\times\dfrac{\sqrt{19}}{10}=\dfrac{9\sqrt{19}}{50}$。

(4) ○：設 $\overline{PB}=\overline{PC}=k$，由餘弦定理可知

$50^2=k^2+k^2-2\times k\times k\times\cos 120^\circ\Rightarrow k=\dfrac{50}{\sqrt{3}}$，

故 $\overline{PC}=\dfrac{50}{\sqrt{3}}$。

(5) ○：$\overline{OP}=\sqrt{k^2-\overline{OB}^2}=\sqrt{\dfrac{50^2}{3}-\dfrac{250^2}{81}}$

$=\sqrt{\dfrac{27\times 50^2-250^2}{81}}=\dfrac{50\sqrt{27-5^2}}{9}=\dfrac{50\sqrt{2}}{9}$。

故選(2)(4)(5)。

三、選填題

13. 【測驗目標】三次函數的對稱性

【解析】將 $f(x)$ 化為標準式，

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{3}{2}x^2+1=\dfrac{1}{2}(x+1)^3-\dfrac{3}{2}(x+1)+2$，

所以 $y=f(x)$ 的圖形的對稱中心為 $P(-1,2)$。

$A(-2,3)$、$B(1,3)$、點 C、D 在 $y=f(x)$ 的圖形上，

因為 $ABCD$ 為平行四邊形，

所以 C 為點 A 關於點 P 的對稱點，

D 為點 B 關於點 P 的對稱點，

所以 $C(0,1)$，$D(-3,1)$，

且可知 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 皆平行 x 軸，

因此，$ABCD$ 的面積為 $3\times 2=6$。

14. 【測驗目標】排列組合與機率

【解析】依黑球的個數來分類

(1) 若黑球 0 顆，則白色及紅色共 7 顆，每個位置可以選紅球或白球，共有 2^7 種。

(2) 若黑球 1 顆，則白色及紅色共 6 顆，先排白色及紅色球，有 2^6 種，再從這 6 顆球所產生的 7 個空隙中任選 1 個放入黑色，有 C_1^7 種，由乘法原理共有 $C_1^7\cdot 2^6$ 種。

(3) 若黑球 2 顆，則白色及紅色共 5 顆，先排白色及紅色球，有 2^5 種，再從這 5 顆球所產生的 6 個空隙中任選 2 個放入黑色，有 C_2^6 種，由乘法原理共有 $C_2^6\cdot 2^5$ 種。

(4) 若黑球 3 顆，則白色及紅色共 4 顆，先排白色及紅色球，有 2^4 種，再從這 4 顆球所產生的 5 個空隙中任選 3 個放入黑色，有 C_3^5 種，由乘法原理共有 $C_3^5\cdot 2^4$ 種。

(5) 若黑球 4 顆，則白色及紅色共 3 顆，先排白色及紅色球，有 2^3 種，再從這 3 顆球所產生的 4 個空隙中任選 4 個放入黑色，有 C_4^4 種，由乘法原理共有 $C_4^4\cdot 2^3$ 種。

所求為 $2^7+C_1^7\cdot 2^6+C_2^6\cdot 2^5+C_3^5\cdot 2^4+C_4^4\cdot 2^3=1224$（種）。

15. 【測驗目標】計數法則與排列

【解析】根據題意，最高的戊只能在第二位或是第四位。

(1) 戊在第二位，第一位可以是甲、乙、丙、丁中任一位，剩下三人中排第四位要最高的，剩兩人有兩種排法，所以總共是 $C_1^4\times C_1^2=8$ 種。

(2) 戊在第四位，同樣的有 8 種。

故共 16 種。

16. 【測驗目標】圓與直線

【解析】設 $A(0,0)$、$B(3,0)$，則圓心 $O(3,4)$

$\overleftrightarrow{AE}: x-y=0 \quad \therefore d(O,\overleftrightarrow{AE})=\frac{1}{\sqrt{2}}$

故 $\frac{1}{2}\overline{DE}=\sqrt{4^2-(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}=\frac{\sqrt{62}}{2} \Rightarrow \overline{DE}=\sqrt{62}$ 。

17. 【測驗目標】向量的線性組合與正弦定理

【解析】$5\overrightarrow{IA}=4(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CI})$

$\Rightarrow -5\overrightarrow{AI}=4(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AI})$

$\Rightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{4}{13}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{13}\overrightarrow{AC}$，

設 $\overleftrightarrow{AI}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D，$\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AI} \Rightarrow \overrightarrow{AD}=\frac{4t}{13}\overrightarrow{AB}+\frac{4t}{13}\overrightarrow{AC}$，

又 $\because D,B,C$ 三點共線 $\quad\therefore \frac{4t}{13}+\frac{4t}{13}=1$

$\Rightarrow t=\frac{13}{8} \Rightarrow \overrightarrow{AD}=\frac{13}{8}\overrightarrow{AI}$，$\overrightarrow{AI}=\frac{8}{13}\overrightarrow{AD}$，

且 $\overline{BD}:\overline{DC}=1:1$，則 $a:b:c=10:8:8$，

令 $a=10k$，$b=8k$，$c=8k$，

$\overline{AD}=\sqrt{(8k)^2+(5k)^2}=\sqrt{39}k$，

$r=\frac{\triangle ABC\text{ 面積}}{\triangle ABC\text{ 半周長}}=\frac{5}{13}\sqrt{39}k=15$，

所以 $k=\sqrt{39}$，$\sin B=\frac{\sqrt{39}}{8}=\frac{b}{2R}=\frac{8\sqrt{39}}{2R}$，所以 $R=32$。

＜另解＞

設 $\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$，

$\because I$ 為內心

$\therefore \overrightarrow{OI}=\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$，

又 $5\overrightarrow{IA}=4(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CI})$

$\Rightarrow 5(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OI})=4(\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OC})$

$\Rightarrow \overrightarrow{OI}=\frac{5}{13}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{13}\overrightarrow{OB}+\frac{4}{13}\overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow a:b:c=5:4:4$，設 $a=5k$，$b=4k$，$c=4k$

$\Rightarrow \cos B=\frac{5^2+4^2-4^2}{2\cdot 5\cdot 4}=\frac{5}{8} \Rightarrow \sin B=\frac{\sqrt{39}}{8}$，

$\because \triangle ABC$ 面積 $=15\cdot\frac{13k}{2}=\frac{1}{2}\cdot 5k\cdot 4k\cdot\frac{\sqrt{39}}{8} \quad \therefore k=2\sqrt{39}$

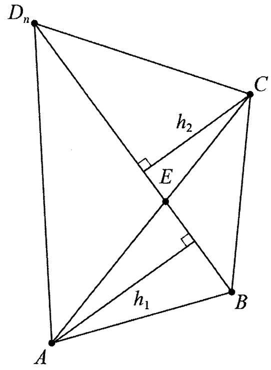
$\therefore 2R=\frac{b}{\sin B}=\frac{4k}{\frac{\sqrt{39}}{8}}=64 \Rightarrow R=32$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. 【測驗目標】向量的分點公式

【解析】$\triangle ABD_n$ 中，過 A 作 $\overline{BD_n}$ 上的高 h_1，

$\triangle BCD_n$ 中，過 C 作 $\overline{BD_n}$ 上的高 h_2。



$\because \triangle ABD_n$ 的面積為 $\frac{1}{2}\cdot\overline{BD_n}\cdot h_1$，

$\triangle BCD_n$ 的面積為 $\frac{1}{2}\cdot\overline{BD_n}\cdot h_2$，

且因為 $\triangle ABD_n$ 的面積為 $\triangle BCD_n$ 的 2 倍，

所以 $h_1:h_2=\overline{AE}:\overline{EC}=2:1$，

由向量的分點公式得

$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$，

故 $(\alpha,\beta)=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$。

故選(2)。

19. 【測驗目標】遞迴數列、等比數列

【解析】因為 B,E,D_n 共線，所以設 $\overrightarrow{BD}_n=k_n\overrightarrow{BE}$，$k_n\in R$，

由 18.之結果知 $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BD}_n=\frac{1}{3}k_n\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}k_n\overrightarrow{BC}$，（2 分）

又 $\overrightarrow{BD}_n=(a_n-2a_{n-1})\overrightarrow{BA}+(a_{n+1}-3a_n)\overrightarrow{BC}$，

其中 $n\geq 2$，$n\in N$，

因為線性組合的表示法唯一，所以

$\begin{cases} a_n-2a_{n-1}=\frac{1}{3}k_n \\ a_{n+1}-3a_n=\frac{2}{3}k_n \end{cases} \Rightarrow a_{n+1}-3a_n=2(a_n-2a_{n-1})$

$\Rightarrow a_{n+1}-a_n=4(a_n-a_{n-1})$，即 $b_{n+1}=4b_n$，$n\geq 2$，（2 分）

又 $\because b_2=a_2-a_1=5-1=4$

$\therefore b_2=4\times 1=4b_1 \Rightarrow b_{n+1}=4b_n$，$n\geq 1$，（1 分）

因此，數列 $\langle b_n\rangle$ 為等比數列，公比為 4。（1 分）

20. 【測驗目標】等比級數、對數的應用

【解析】因為數列 $\langle b_n\rangle$ 為首項 $b_1=1$，公比為 4 的等比數列

$\Rightarrow b_1+b_2+\cdots+b_{30}=\frac{1\cdot(4^{30}-1)}{4-1}=\frac{4^{30}-1}{3}=\frac{4^{30}}{3}-\frac{1}{3}$，（2 分）

又 $\because \frac{4^{30}-1}{3}$ 與 $\frac{4^{30}}{3}$ 整數部分位數相同，

而 $\frac{4^{30}}{3}=10^{30\cdot\log 4-\log 3}=10^{17.5829}$，（1 分）

故 $b_1+b_2+\cdots+b_{30}$ 是 18 位數字。（1 分）