全國高中 115 年(114 學年度)高三上
第三次聯合模擬考數學　數 A 試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題

一、單選題

1. 已知 6 個星期的時間恰好是$10!$秒，若 36 個星期的時間是m秒，試問m的首位數字為何？
   (1) 2　(2) 3　(3) 4　(4) 5　(5) 6

答：(1)

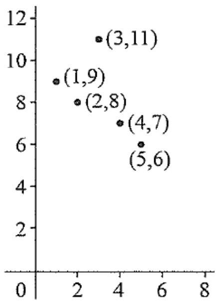
解：$m=6\times 10!=2^9\times 3^5\times 5^2\times 7=\left(10^{\log 2}\right)^9\times\left(10^{\log 3}\right)^5\times\left(10^{\log 5}\right)^2\times\left(10^{\log 7}\right)$

$=10^{0.3010\times 9+0.4771\times 5+0.6990\times 2+0.8451}=10^{7.3376}=10^{0.3376}\times 10^7=2.\cdots\times 10^7$

2. 有五筆資料$\left(x_i, y_i\right)$（$i=1,2,3,4,5$）分別為$(1,9)$，$(2,8)$，$(3,11)$，$(4,7)$，$(5,6)$，試問刪掉哪一筆資料可使得留下的四筆資料相關程度最強？
   （即$|r|$最大，其中r為相關係數）
   (1)$(1,9)$　(2)$(2,8)$　(3)$(3,11)$　(4)$(4,7)$　(5)$(5,6)$

答：(3)

解：畫圖即知



3. 設實數$x>1$滿足$x-\dfrac{1}{x}=2\sqrt{2}$，試問x^4的整數部分為何？
   (1)98　(2)97　(3)96　(4)95　(5)94

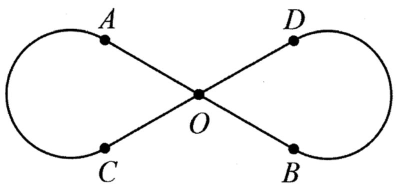
答：(2)

解：$x-\dfrac{1}{x}=2\sqrt{2}\Rightarrow x^2-2+\dfrac{1}{x^2}=8\Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=10$

$\Rightarrow x^4+2+\dfrac{1}{x^4}=100\Rightarrow x^4+\dfrac{1}{x^4}=98$

$x>1\Rightarrow x^4>1\Rightarrow\dfrac{1}{x^4}<1\Rightarrow [x^4]=97$

4. 阿南想製作一個「∞」符號的看板，預計用兩個相同半徑的圓弧及兩個相同長度的線段來組成這個符號看板，如右圖，A、B、C、D皆為線段與圓弧所在圓相切的切點，且$\overline{AB}=6$，$\angle BOD=60^\circ$，試問此「∞」所圍的面積為何？



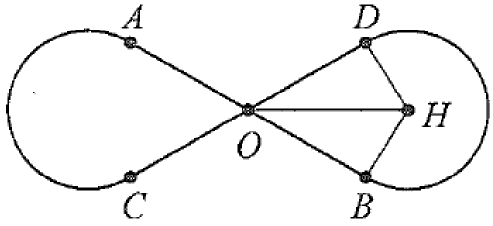
   (1)$3\sqrt{3}+2\pi$　(2)$3\sqrt{3}+4\pi$　(3)$6\sqrt{3}+2\pi$

(4) $6\sqrt{3}+4\pi$　　(5) $6\sqrt{3}+6\pi$

答：(4)

解：$\pi\times\left(\sqrt{3}\right)^2\times\frac{2}{3}\times2+\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times3\times4$

$=4\pi+6\sqrt{3}$



5. 坐標平面上，已知 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 垂直，且 $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$，若直線 L_1 與直線 L_2 的法向量分別為 $4\vec{a}+\vec{b}$ 與 $4\vec{a}-\vec{b}$，試問直線 L_1 與直線 L_2 夾角的正弦值為何？

(1) 1　(2) $\frac{1}{4}$　(3) $\frac{4}{5}$　(4) $\frac{15}{17}$　(5) $\frac{8}{17}$

答：(5)

解：$\cos\theta=\frac{(1-4)(1+4)}{\sqrt{17}\times\sqrt{17}}=\frac{-15}{17}\ \Rightarrow\sin\theta=\frac{8}{17}$

6. 設 $0\le x\le2\pi$，試問方程式 $\sin\left(x^2\right)+\cos\left(x^2\right)=0$ 有多少個實根？

(1) 11　(2) 12　(3) 13　(4) 14　(5) 15

答：(2)

解：$\cos\left(x^2\right)+\sin\left(x^2\right)=0\ \Rightarrow x^2=\frac{3\pi}{4}+k\pi$，$k\in Z$

$0\le x^2\le4\pi^2\ \Rightarrow 0\le\frac{3}{4}+k\le4\pi\ \Rightarrow k=0,1,2,\cdots,11$ 共 12 解

二、多選題

7. 下列對於資料統計的敘述，試選出正確的選項。

(1)若一組資料均為正數，則其平均數、眾數、中位數皆為正數

(2)若一組資料的標準差為零，則其平均數、眾數、中位數皆相等

(3)若兩組資料，全距較大的一組，則其平均數、眾數、中位數也較大

(4)若兩組資料的相關係數為零，則表示兩組資料毫無關係

(5)若兩組資料最適直線的斜率為正數，則其相關係數必為正數

答：(1)(2)(5)

解：(3)反例：$(-10,10)$之全距 20，平均數 0。$(4,6)$之全距 2，平均數 5

(4)當數據對稱分布在拋物線上，相關係數為零，但有曲線相關

8. 坐標平面上 $A(3,7)$、$B(-1,-9)$、$C(4,26)$ 為 $y=f(x)$ 圖形上三點，若 $f(x)$ 為三次多項式，P 為 $y=f(x)$ 的對稱中心，A 關於 P 的對稱點為 B，試選出正確的選項。

(1) $P(1,-1)$

(2) $y=f(x)$ 的廣域特徵近似於 $y=2x^3$

(3) $y=f(x)$ 在 $x=0$ 附近的局部特徵近似於 $y=3x$

(4) $f(2)=0$

(5)不等式 $f(x)\times f(x-2)\le0$ 的解為 $2\le x\le4$

答：(1)(4)(5)

解：P 為 $\overline{AB}$ 中點 $\Rightarrow P(1,-1)$

$f(x)=a(x-1)^3+m(x-1)-1 \left\langle \begin{array}{l} \text{過 } A(3,7) \Rightarrow 8a+2m-1=7 \\ \text{過 } C(4,26) \Rightarrow 27a+3m-1=26 \end{array} \right.$

$\Rightarrow a=1$，$m=0$，$f(x)=(x-1)^3-1=x^3-3x^2+3x-2$

$\Rightarrow$ 廣域特徵近似 $y=x^3$，在 $x=0$ 處局部近似 $y=3x-2$

$f(2)=0$，$f(x)=(x-2)\left[(x-1)^2+(x-1)+1\right]$，其中 $(x-1)^2+(x-1)+1$ 恆正

$f(x)f(x-2)\le 0$ 等同 $(x-2)(x-4)\le 0 \quad \Rightarrow 2\le x\le 4$

9. 關於下列敘述，試選出正確的選項。

(1)設 x 為實數，則 $\left(x^2+2\right)+\dfrac{1}{x^2+2}$ 的最小值為 2

(2)設 x 為實數，則 2^x+2^{-x} 的最小值為 2

(3)設 x 為實數，則 $\sin x+\cos x$ 的最小值為 -2

(4)設 x 為實數，則 $|x+1|+|x-3|$ 的最小值為 2

(5)設點 (a,b) 為直線 $x+y=2$ 上的動點，則 a^2+b^2 的最小值為 2

答：(2)(5)

解：(1) $x^2+2+\dfrac{1}{x^2+2}\ge 2\sqrt{\left(x^2+2\right)\left(\dfrac{1}{x^2+2}\right)}=2$

但 $\left(x^2+2\right)=\dfrac{1}{x^2+2} \quad \Rightarrow \left(x^2+2\right)^2=1 \quad \Rightarrow x^2+2=\pm 1$ 矛盾，表等號不成立

(2) $2^x+2^{-x}\ge 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$

而 $2^x=2^{-x} \quad \Rightarrow 2^{2x}=1 \quad \Rightarrow 2^x=\pm 1$（取正）$\Rightarrow x=0$ 等號成立

(3) $-\sqrt{2}\le \sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+45^\circ\right)\le\sqrt{2}$

(4) $|x+1|+|x-3|\ge 4$

(5) $a^2+b^2=a^2+(2-a)^2=2a^2-4a+4=2(a-1)^2+2\ge 2$

10. 坐標平面上，設 $\overrightarrow{a}=(4,3)$、$\overrightarrow{b}=(3,-4)$，已知 $\overrightarrow{u}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 上的正射影長比原長少 1，而在 $\overrightarrow{v}$ 上的正射影為 $\overrightarrow{b}$。若 $\overrightarrow{u}$ 與兩向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{v}$ 的夾角皆為銳角，試選出正確的選項。

(1) $\left|\overrightarrow{b}\right|=5$ (2) $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$ (3) $\left|\overrightarrow{u}\right|=12$ (4) $\overrightarrow{u}=(51,32)$

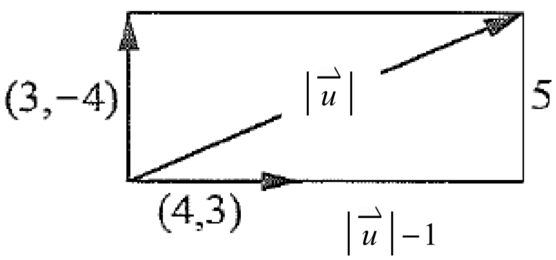
(5) $\overrightarrow{u}$ 在向量 $(-1,8)$ 上的正射影長為 $\dfrac{\sqrt{65}}{5}$

答：(1)(2)(5)

解：(1) $\left|\overrightarrow{a}\right|=\left|\overrightarrow{b}\right|=5$

(2) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$

(3) $\left|\overrightarrow{u}\right|^2=5^2+\left(\left|\overrightarrow{u}\right|-1\right)^2\Rightarrow 0=25-2\left|\overrightarrow{u}\right|$·



(4) $\vec{u}=\frac{12}{5}\vec{a}+\vec{b}=\frac{12}{5}(4,3)+(3,-4)=\left(\frac{63}{5},\frac{16}{5}\right)$

(5) $\left|\,|\vec{u}|\times\frac{\vec{u}\cdot\vec{m}}{|\vec{u}||\vec{m}|}\right|=\frac{\left(\frac{63}{5},\frac{16}{5}\right)\cdot(-1,8)}{\sqrt{65}}=\frac{\sqrt{65}}{5}$

11.在 ΔABC 中，已知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-5$，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=-6$，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=-7$，試選出正確的選項。

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=7$ (2) $|\overrightarrow{AB}|^2=13$ (3) ΔABC 為鈍角三角形

(4) ABC 面積為 $\frac{\sqrt{107}}{2}$ (5) $\overline{BC}$ 邊上的中線長為 $\sqrt{\frac{39}{2}}$

答：(1)(4)

解：(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=-(-7)=7$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=|\overrightarrow{AB}|^2+(-5)=7 \Rightarrow |\overrightarrow{AB}|^2=12$

(3)應為銳角Δ

(4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AC}|^2+(-6)=7 \Rightarrow |\overrightarrow{AC}|^2=13$

$\Delta ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{12\times13-7^2}=\frac{\sqrt{107}}{2}$

(5) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}\cdot\left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right)=5-|\overrightarrow{BC}|^2=-6 \Rightarrow |\overrightarrow{BC}|^2=11$

中線定理：$|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2=2\left(|\overrightarrow{AM}|^2+\frac{1}{4}|\overrightarrow{BC}|^2\right)$

$\Rightarrow 12+13=2\left(|\overrightarrow{AM}|^2+\frac{11}{4}\right) \Rightarrow |\overrightarrow{AM}|^2=\frac{39}{4} \Rightarrow |\overrightarrow{AM}|=\frac{\sqrt{39}}{2}$

12.一個三角形空地的三個頂點分別為 A、B、C，且 $\overline{BC}=50$ 公尺，$\cos\angle BAC=\frac{\sqrt{19}}{10}$。阿文在此三角形的外心點 O 乘坐熱氣球升空，熱氣球上升到點 P 時，阿文測得 P 在地面的投影點恰為 O，且 $\angle BPC=120°$，試選出正確的選項。

(1) $\sin\angle BAC=\frac{3}{10}$ (2) $\overline{OB}=\frac{250}{9}$ (3) $\sin\angle BOC=\frac{9\sqrt{19}}{100}$

(4) $\overline{PC}=\frac{50}{\sqrt{3}}$ (5) $\overline{OP}=\frac{50\sqrt{2}}{9}$

答：(2)(4)(5)

解：(1) $\cos\angle BAC=\frac{\sqrt{19}}{10} \Rightarrow \sin\angle BAC=\frac{9}{10}$

(2)正弦定律 $\Rightarrow 2R=\frac{\overline{BC}}{\sin\angle BAC}=\frac{50}{\frac{9}{10}}=\frac{500}{9} \Rightarrow R=\frac{250}{9}=\overline{OB}$

(3) $\sin\angle BOC=\sin 2\angle BAC=2\left(\dfrac{\sqrt{19}}{10}\right)\left(\dfrac{9}{10}\right)=\dfrac{9\sqrt{19}}{50}$

三、選填題

13. 已知 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{3}{2}x^2+1$，點 $A(-2,f(-2))$，點 $B(1,f(1))$，點 C 、 D 在 $y=f(x)$ 的圖形上，若 $ABCD$ 為平行四邊形，則 $ABCD$ 的面積為________。

答： 6

解： $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+1)^3-\dfrac{3}{2}(x+1)+2$，對稱中心 $(-1,2)$

$A(-2,3)$，$B(1,3)$，$C(0,1)$，$D(-3,1)$ $\Rightarrow$ 面積 $=\left\|\begin{matrix}\overrightarrow{AB}\\\overrightarrow{AD}\end{matrix}\right\|=6$

14. 一袋中有白色、黑色、紅色三種顏色的球各 7 顆，若今自袋中任取 7 球排成一列，規定只有黑球和黑球不能相鄰，若僅觀察顏色，則此七顆球共有________種不同的排列結果。

答： 1224

解： 7 白紅 $\Rightarrow C^7_0+C^7_1+C^7_2+\cdots+C^7_7=2^7=128$

6 白紅 $\Rightarrow \left(C^6_0+C^6_1+\cdots+C^6_6\right)\times C^7_1=2^6\times 7=448$

5 白紅 $\Rightarrow \left(C^5_0+C^5_1+\cdots+C^5_5\right)\times C^6_2=2^5\times 15=480$

4 白紅 $\Rightarrow \left(C^4_0+C^4_1+\cdots+C^4_4\right)\times C^5_3=2^4\times 10=160$

3 白紅 $\Rightarrow \left(C^3_0+C^3_1+\cdots+C^3_3\right)\times C^4_4=2^3\times 1=8$

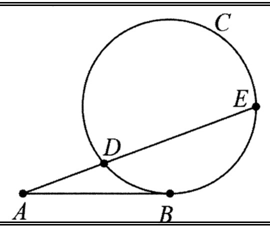
合計 1224 種

15. 身高由低至高的甲、乙、丙、丁、戊等五人，排成一列，從左邊數來的第一人比第二人矮，第二人比第三人高，第三人比第四人矮，第四人比第五人高，試問五人這樣的排法有________種。

答： 16

解： $\underbrace{2!\times 3!}_{\text{戊丁排 24 位}}+\underbrace{2!\times 1\times 2!}_{\text{戊丙排 24 位（丁必在戊之外側）}}=12+4=16$

16. 如右圖，直線 AB 切圓 C 於 B，直線 AE 交圓 C 於 D 、 E 。若 $\overline{AB}=3$，圓 C 的半徑為 4，$\angle EAB=\dfrac{\pi}{4}$，則弦長 $\overline{DE}=$________。



答： $\sqrt{62}$

解： 圓 $x^2+(y-4)^2=4^2$，$B(0,0)$，$A(-3,0)$，$\overleftrightarrow{DE}$: $y=x+3$

$$d\left((0,4),\overleftrightarrow{DE}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \overline{DE}=2\sqrt{4^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{62}$$

17.已知 I 為 ΔABC 的內心，且 $5\overrightarrow{IA}=4\left(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CI}\right)$，設 R 、 r 分別表示 ΔABC 的外接圓半徑與內切圓半徑，若 $r=15$，則 $R=$________。

答： 32

解： $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{a+b+c}\left(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}\right) \Rightarrow a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

等同 $5\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Rightarrow a=5t$ ， $b=4t$ ， $c=4t$

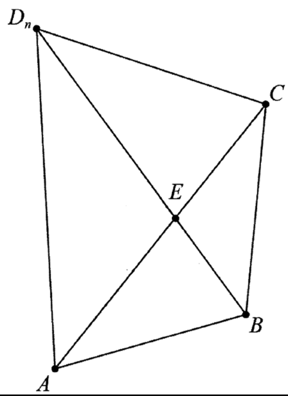
$\Delta=\frac{abc}{4R}=rS \Rightarrow \sqrt{\frac{13t}{2}\times\frac{3t}{2}\times\frac{5t}{2}\times\frac{5t}{2}}=\frac{5t\times4t\times4t}{4R}=15\times\frac{13t}{2}$

故 $t=2\sqrt{39} \Rightarrow R=\frac{39}{8}t^2=32$

第貳部分：混合題或非選擇題

18-20 題為題組

如圖，ΔABC 中，E 為 $\overline{AC}$ 上一點，D_n 在 $\overleftrightarrow{BE}$ 上，且 ΔABD_n 的面積為 ΔBCD_n 的 2 倍。另一數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_1=1$ ，$a_2=5$ ，且知 $n\ge2$ 時，滿足 $\overrightarrow{BD_n}=\left(a_n-2a_{n-1}\right)\overrightarrow{BA}+\left(a_{n+1}-3a_n\right)\overrightarrow{BC}$，試回答下列問題：



18.設 $\overrightarrow{BE}=\alpha\overrightarrow{BA}+\beta\overrightarrow{BC}$， α 、 β 為實數，試問數對 (α,β) 為何？（單選題） (1) $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ (2) $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ (3) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ (4) $\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$ (5) $\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$

答： (2)

解： $\because \Delta ABD_n : \Delta CBD_n=2:1$， $D_n\in\overleftrightarrow{BE}$ $\therefore \overline{AE}:\overline{CE}=2:1$

$\Rightarrow \overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

19.設數列 $\langle b_n\rangle$ 滿足 $b_1=1$ ， $b_n=a_n-a_{n-1}$ ， $n\ge2$ ，證明：數列 $\langle b_n\rangle$ 為等比數列。

證： $\left(a_n-2a_{n-1}\right)\times2=\left(a_{n+1}-3a_n\right) \Rightarrow a_{n+1}-5a_n+4a_{n-1}=0$

$\Rightarrow \left(a_{n+1}-a_n\right)=4\left(a_n-a_{n-1}\right) \Rightarrow b_{n+1}=4b_n$ ， $b_1=1 \Rightarrow \langle b_n\rangle=\langle 1\times4^{n-1}\rangle$

20.試求 $b_1+b_2+\cdots+b_{30}$ 展開後是幾位數的正整數。

答： 18位數

$\boxed{解}$：$\displaystyle\sum_{i=1}^{30} b_i = \frac{1\left[1-4^{30}\right]}{1-4} = \frac{1}{3}\left[4^{30}-1\right] \fallingdotseq \frac{4^{30}}{3}$

$\displaystyle = \frac{\left(10^{\log 4}\right)^{30}}{10^{\log 3}} = 10^{0.6020\times 30-0.4771} = 10^{17.5829}$，表 18 位數