全國高級中學 105 學年度第 1 學期第三次學科能力測驗

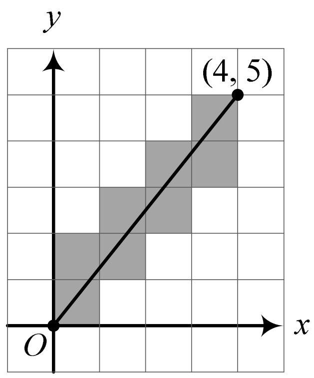
RA377

第壹部分：選擇題(佔 55 分)

一、 單選題(占 25 分)

1.(　　) 數學科普作家馬丁 • 加德納(Martin Gardner，1914-2010)曾說：「世界上僅存在一個九位數，其中首位數是 1 的倍數，前兩位數是 2 的倍數，前三位數是 3 的倍數，……，前 n 位數是 n 的倍數，……，前九位數是 9 的倍數，但是 1，2，3，4，5，6，7，8，9 只能用過一次。」請問下列哪一個九位數符合要求？
(1) 187654923　(2) 987654321　(3) 789456123　(4) 381654729　(5) 147285936

2.(　　) 右圖表示從坐標(0, 0)到坐標(4, 5)的線段所「經過」的格子數為 8，「經過」是指線段必須落在格子內，亦即通過格子點就不屬於「經過」。試問從坐標(0, 0)到坐標(a, b)，其中 $a\in N$，$b\in N$，$a\neq b$ 所經過的格子數為何？

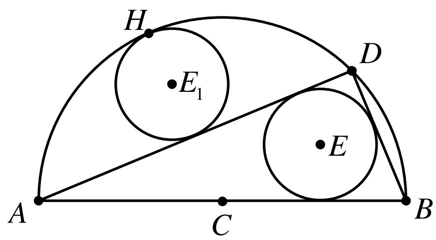


(1) $\dfrac{a\cdot b}{2}-2$　(2) $\dfrac{a}{4}+b+2$
(3) $a+b-(a,b)$，其中 (a,b) 代表 a，b 的最大公因數
(4) $\dfrac{[a,b]}{2}-2$，其中 $[a,b]$ 代表 a，b 的最小公倍數
(5) $a+[\dfrac{b}{2}]+2$，其中 $[\dfrac{b}{2}]$ 代表小於或等於 $\dfrac{b}{2}$ 的最大整數

3.(　　) 若數列 $x_i=i, i=1,2,3,\cdots,11$ 的算數平均數為 μ_X、標準差為 σ_X；另一數列 $y_i=\dfrac{x_i-\mu_X}{\sigma_X}, i=1,2,3,\cdots,11$ 的算數平均數為 μ_Y、標準差為 σ_Y；若 x_i，y_i 的相關係數為 r_{XY}；又 y 對 x 的迴歸直線斜率為 m。下列哪一個選項敘述是正確的？
(1) $\mu_X<\sigma_X$　(2) $\mu_Y{}^2+\sigma_Y{}^2>1$　(3) $|r_{XY}|<1$
(4) y 對 x 的迴歸直線必過 (μ_Y,μ_X)　(5) $m\cdot\sigma_X=1$

4.(　　) 印度數學史上最負盛名的數學家拉瑪努江(Srinivasa Ramanujan，1887-1920)是數論專家，他曾經研究過由正整數組成正整數的組合方式，例如：正整數 5 的組合方式有 5，4+1，3+2，3+1+1，2+2+1，2+1+1+1，1+1+1+1+1 共 7 種可能，其中 3+2，2+3 視為同一種組合。試問正整數 7 的組合方式有幾種？
(1) 12 種　(2) 13 種　(3) 14 種　(4) 15 種　(5) 16 種

5.(　　) 如右圖的兩小圓為半徑相等的圓且圓心分別為 E_1，E，圓 E 與直角三角形 ADB 相切，圓 E_1 與弓形 AHD 相切，且通過 $\overline{AD}$ 中點，C 為大圓圓心，又 C，E_1，H 共線，令小圓半徑與大圓半徑分別為 r 與 R，求 $r：R=$？



(1) 4：13　(2) 5：13　(3) 4：11　(4) 3：13　(5) 5：12

二、 多選題(占 30 分)

6.(　　) 俊賢出國度假一週，臨行前託好友明義為植物澆水，因天氣炎熱，若沒澆水，一週後植物死亡的機率為 80%，但是，即便有適當的澆水，一週後植物死亡的機率仍有 30%，依照

過往的經驗知，明義忘記為植物澆水的機率為 20%，下列哪些選項中的敘述是正確的？

(1) 植物順利活過本週的機率為 60%

(2) 當俊賢回國時，若植物死亡，則是因為明義忘記為植物澆水的機率為 $\frac{3}{5}$

(3) 若明義忘記為植物澆水，當俊賢回國時，則植物死亡的機率為 80%

(4) 若想要植物順利活過本週的機率超過 65%，則明義忘記為植物澆水的機率必須小於 10%

(5) 在本題中，明義忘記為植物澆水事件與植物死亡事件是獨立事件

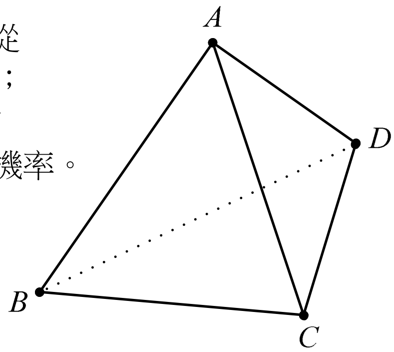
7.(　　) 設 x，y 為實數，滿足 $x\ge 0$ ，$y\ge 0$ ，$2x+y\le 7$ ，$x+2y\le 8$ 的區域為 R，下列哪些選項是正確的？

(1) 若 $3x-y$ 的最大值為 a，最小值為 b，則 $a+b=\frac{21}{2}$　　(2) 區域 R 的面積為 $\frac{37}{4}$

(3) 若 $(x-2)^2+(y-1)^2$ 的最大值為 c，則 c=12　　(4) 若 $\frac{y}{x-8}$ 的最小值為 d，則 $d=\frac{1}{2}$

(5) 區域 R 的格子點個數大於 10 個，其中格子點的定義為其橫坐標與縱坐標接為整數

8.(　　) 已知 $ABCD$ 為稜線 1 公尺的正四面體，今小蟲在 A 點。若從 A 點開始出發沿稜線爬行，到 B，C，D 三點的機率均相同；若從 B 點開始出發沿稜線爬行，到 A，C，D 三點的機率亦均相同，其餘類推。設 a_n 表示小蟲爬行 n 公尺後在 A 點的機率。下列哪些選項是正確的？



(1) $a_1=0$　　(2) $a_2=\frac{1}{3}$

(3) 若 $n\in N$ ，則 $a_{n+1}=\frac{1-a_n}{4}$

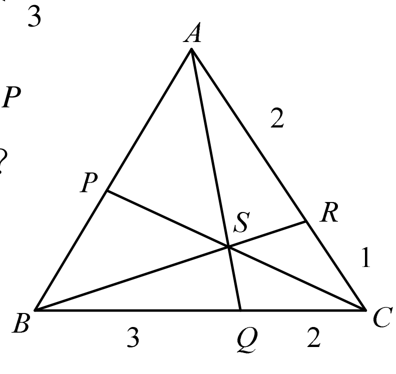
(4) 若 $n\in N$ ，則 $a_n=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times(-\frac{1}{3})^n$　　(5) 若 n=5，則小蟲在 B 點的機率為 $\frac{80}{243}$

9.(　　) 試用正切函數的和角公式 $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}$ 導出下列式子。下列哪些選項是正確的？

(1) $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$　　(2) $\tan 3\theta=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^3\theta}$　　(3) $\tan 4\theta=\frac{4\tan\theta-4\tan^3\theta}{1-6\tan^2\theta+\tan^4\theta}$

(4) 若 $k=\frac{\tan 20^\circ+\tan 205^\circ}{1-\tan 20^\circ\cdot\tan 205^\circ}$ ，則 $k>0$　　(5) $\frac{\sqrt{3}}{5}<\tan 20^\circ<\frac{\sqrt{3}}{3}$

10.(　　) 設△ABC 中，若 $\overline{BQ}:\overline{QC}=3:2$ ，又 $\overline{CR}:\overline{RA}=1:2$ 且 C，S，P 共線，若 $\overrightarrow{CS}=x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}=k\overrightarrow{CP}$ ，下列哪些選項是正確的？



(1) $y-x=\frac{1}{11}$　　(2) $\overline{AP}:\overline{PB}=y:x$　　(3) $k=\frac{7}{11}$

(4) a△APS：a△ABC=24：91，其中 a△APS 代表△APS 的面積

(5) 若 G 為△ABC 之重心，且 $\overrightarrow{SG}=t\overrightarrow{CA}+s\overrightarrow{CB}$ ，則 $t+s=\frac{5}{33}$

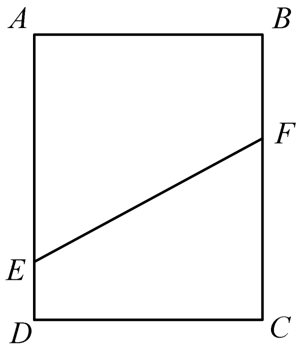
11.(　　) 若$\sin\theta$，$\cos\theta$為方程式$5x^2-7x+k=0$的兩根，且$45^\circ<\theta<90^\circ$，則下列哪些選項是正確的？

(1) $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$　(2) $\sin 2\theta=\dfrac{24}{25}$　(3) $\cos(\theta+60^\circ)=\dfrac{3-4\sqrt{3}}{10}$

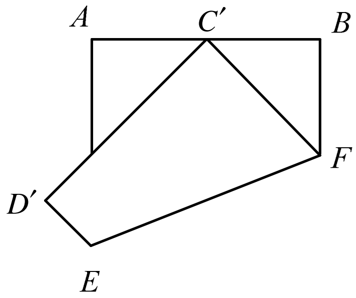
(4) $\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　(5) $\sin 3\theta+\cos 3\theta=-\dfrac{73}{125}$

第貳部分：選填題(占 45 分)

A. 長方形紙張$ABCD$，已知E、F分別在$\overline{AD}$、$\overline{BC}$上(如圖(一))，今沿著$\overline{EF}$將長方形摺疊，頂點C正好落在$\overline{AB}$的中點C'上(如圖(二))，若$\overline{AB}=10$、$\overline{BC}=12$，求$\overline{EF}=$_________。(化為最簡分數)



圖(一)



圖(二)

B. 設$\overrightarrow{a}=(x,y)$，$\overrightarrow{b}=(3,4)$，x，y均為實數，且$|\overrightarrow{a}|=1$，求$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$內積的最小值為_________。

C. 俊賢想求7386027^{10}除以101×103的餘數R，數學老師提示他可以利用多項式的除法，即$(7x^3+38x^2+60x+27)^{10}=(x+1)(x+3)Q(x)+(ax+b)$。試求餘數$R$=_________。

D. 若數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=\dfrac{n^2}{5}$，其中$n\in N$。試求$\sum_{k=1}^{30}a_k=$__________。

E. 若方程式$(\log_3(x^2+y))^2+(\log_3\dfrac{xy}{3})^2+4=\log_3(x^2+y)^4$的對數解分別為$(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$，$(x_3,y_3)$。試求$y_1+y_2+y_3=$________。

F. 已知$\dfrac{x_1}{x_1+2}=\dfrac{x_2}{x_2+4}=\dfrac{x_3}{x_3+6}=\cdots\cdots=\dfrac{x_n}{x_n+2n}$，又$\sum_{k=1}^{20}x_k<1000$，若$x_1\in N$。試求$x_1$的最大值為__________。

G. 若 1，2，3，4，……，99998，99999，100000 這十萬個正整數中，各位數字和小於 8 的正整數有 k 個，例如：3211 就是其中一個，因為 3+2+1+1=7 < 8。試求 k=__________。

H. 指數函數 $f(x)=a^x+b$ 通過(1, 2)，(2, 8)兩點。若 f(99)的個位數為 c，且 f(99)的位數為 d。試求 $c+d$=__________。

I. 若 $i=\sqrt{-1}$，且$1+2i+3i^2+\cdots\cdots+200i^{199}=a+bi$，其中 a，b 為實數，求 $a+b$=____________。

RA377 全國高級中學 105 學年度第 1 學期第三次學科能力測驗
參考答案

第壹部分：選擇題

1.(4) **2.**(3) **3.**(5) **4.**(4) **5.**(1) **6.**(1)(3)(4) **7.**(2)(5) **8.**(1)(2)(4)
9.(2)(3)(4)(5) **10.**(2)(4) **11.**(1)(2)(3)(5)

第貳部分：選填題

A. $\frac{65}{6}$ **B.** -5 **C.** 721 **D.** 569 **E.** 9 **F.** 4 **G.** 792 **H.** 54 **I.** -200