

全國公立高中 106 學年度第三次學科能力測驗



RA380

第壹部分：選擇題(占 65 分)

一、 單選題(占 30 分)

1. 已知在數線上， A 點的坐標為 a ， B 點的坐標為 b ，且 $a \neq b$ 。若有甲與乙兩質點分別由 A 、 B 兩點相向移動，且甲質點移動的速度為乙質點移動速度的 2.5 倍。若甲與乙兩質點在 P 點相遇，則 P 點在數線上的坐標為下列哪一選項？
 (1) $\frac{a+b}{2}$ (2) $\frac{3a+2b}{5}$ (3) $\frac{2a+3b}{5}$ (4) $\frac{2a+5b}{7}$ (5) $\frac{5a+2b}{7}$
2. a, b 為實數，已知不等式 $ax^2 + bx + 1 \leq 0$ 的解恰為 $x = \frac{1}{3}$ ，則 $a+b$ 之值為下列哪一選項？
 (1) 3 (2) 6 (3) 9 (4) 12 (5) 15
3. 有一個不透明的袋子，袋中有黃、紅、紫三種顏色的球各一顆，每顆球被取到的機率相同。若由袋中連續取球 3 次，每次一球，取後放回。令 $P(k)$ 表此三球共有 k 種顏色之機率，則 $P(1)$ 、 $P(2)$ 、 $P(3)$ 之大小順序為下列哪一選項？
 (1) $P(2) > P(3) > P(1)$ (2) $P(2) > P(1) > P(3)$ (3) $P(3) > P(2) > P(1)$
 (4) $P(3) > P(1) > P(2)$ (5) $P(1) > P(3) > P(2)$
4. 設有一組數據 (x_i, y_i) ，已知 x, y 的算術平均數分別為 $\mu_x = 54$ ， $\mu_y = 63$ ，且 x 與 y 的標準差滿足 $3\sigma_x = 2\sigma_y$ 。若 y 對 x 的迴歸直線亦過點 $(62, 69)$ ，則 x 與 y 的相關係數 r 的範圍為下列哪一選項？
 (1) $0 < r < 0.2$ (2) $0.2 < r < 0.4$ (3) $0.4 < r < 0.6$
 (4) $0.6 < r < 0.8$ (5) $0.8 < r < 1$
5. 已知 $a = \sin 1^\circ$ 、 $b = \sin 1^\circ$ 、 $c = \sin \pi^\circ$ 、 $d = \sin \pi^\circ$ 。請選出正確的選項。
 (1) $b < a < d < c$ (2) $a < c < b < d$ (3) $b < d < a < c$
 (4) $b < d < c < a$ (5) $c < b < d < a$
6. 設 $\vec{a} \neq \vec{0}$ ，且 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}| = |\vec{a} - 2\vec{b}|$ ，若 $|3\vec{a} + 2\vec{b}| = k|\vec{a}|$ ，則 k 之值為下列哪一選項？
 (1) $k = \sqrt{11}$ (2) $k = \sqrt{13}$ (3) $k = \sqrt{15}$ (4) $k = \sqrt{17}$ (5) $k = \sqrt{19}$

二、 多選題(占 35 分)

7. 若多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ，當 $a_n \neq 0$ 時， $f(x)$ 的首項係數為 a_n ， $f(x)$ 的次數為 n ，記作 $\deg f(x) = n$ 。設 m 為實數，且多項式

$$f(x) = 4 \times \frac{(x-1)(x-3)}{(5-1)(5-3)} + 1 \times \frac{(x-1)(x-5)}{(3-1)(3-5)} + m \times \frac{(x-3)(x-5)}{(1-3)(1-5)}$$
。請選出正確的選項。
 (1) $f(5) = 4$ (2) 存在 m ，使得 $\deg f(x) = 2$ (3) 存在 m ，使得 $\deg f(x) = 0$
 (4) 若 $\deg f(x) = 1$ ，則 $m = -1$ (5) 若 $\deg f(x) = 1$ ，則 $f(x)$ 的首項係數為 $\frac{3}{2}$
8. 設 a, b, c 皆為正數，且 $c \neq 1$ ，已知 $\log_c a = 3$ ， $\log_c b = 5$ 。請選出正確的選項。
 (1) $\log_c(a+b) = 15$ (2) $a \times b = c^8$ (3) $\log_a b = \frac{5}{3}$
 (4) $\log_a \frac{c}{a^2} = -\frac{5}{3}$ (5) $\log_{abc} a^2 = \frac{46}{5}$
9. 小樺每日使用某種遊戲點數的策略為：先儲值，讓前一天的剩餘點數變為兩倍，然後再使用 60 點。當遊戲點數變為零或負值時，則停止遊戲(例如：小樺原先有遊戲點數 40 點，一日後，小樺剩餘的遊戲點數 $40 \times 2 - 60 = 20$ 點；二日後，小樺剩餘的遊戲點數 $20 \times 2 - 60 = -20$ 點；

停止遊戲)。若小樺原先已有遊戲點數 a 點(a 為正整數)，請選出正確的選項。

- (1) 每一日，小樺剩餘的遊戲點數一定為整數
 - (2) 每一日，小樺剩餘的遊戲點數一定會較前一日減少
 - (3) 若二日後，小樺剩餘的遊戲點數恰為 0 點，則 a 之值為 45
 - (4) 若每一日小樺剩餘的遊戲點數為一等差數列，則此等差數列的公差為 0
 - (5) 若每一日小樺剩餘的遊戲點數為一等比數列，則此等差數列的公比為 1
10. 設 $\{A, B, C\}$ 為樣本空間 S 的一組分割，且 $P(A) : P(B) : P(C) = 2 : 5 : 3$ 若一事件 D 滿足 $P(D|A) = \frac{1}{6}$ ， $P(D|B) = \frac{2}{5}$ ， $P(D|C) = \frac{1}{3}$ 。請選出正確的選項。
- (1) $P(A) = \frac{1}{2}$
 - (2) $P(A \cap D) = \frac{1}{30}$
 - (3) $P(D) = \frac{9}{10}$
 - (4) $P(B|D) = \frac{3}{5}$
 - (5) 事件 C 和事件 D 為獨立事件
11. 已知 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ，且 $\cos \theta$ 為方程式 $6x^2 + 11x + 3 = 0$ 的一個根。請選出正確的選項。
- (1) $\cos(180^\circ - \theta) = \frac{1}{3}$
 - (2) $\cos 2\theta = -\frac{2}{3}$
 - (3) $\sin 2\theta = -\frac{4}{9}\sqrt{2}$
 - (4) $\cos \frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
 - (5) $\cos 3\theta = \frac{23}{27}$
12. 設 k 為實數，已知圓方程式 $x^2 + y^2 + 4kx - 6ky + 12k^2 - 4k - 8 = 0$ 。請選出正確的選項。
- (1) 圓心的軌跡方程式為 $3x - 2y = 0$
 - (2) 當此圓的圓心為 $(0, 0)$ 時，圓的面積為 8π
 - (3) 當 $k = -2$ 時，圓的面積有最小值
 - (4) 圓的面積最小值為 2π
 - (5) 存在 k ，使得圓與 y 軸相切
13. 在平面上，三角形 ABC 中， $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{BC} = 8$ ， $\overline{CA} = 7$ ，若 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，其中 $1 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 1$ ，則 P 點所成區域為 S 。請選出正確的選項。
- (1) S 的圖形為三角形
 - (2) S 的周長為 48
 - (3) S 的面積為 $40\sqrt{3}$
 - (4) \overline{AP} 的最大值為 $\sqrt{304}$
 - (5) \overline{AP} 的最小值為 5

第貳部分：選填題(占 35 分)

A. 令 $i = \sqrt{-1}$ ， $f(x)$ 為實係數三次多項式，若 $f(1) = 1$ ， $f(1-2i) = 1$ ， $f(0) = 11$ ，則 $f(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式為_____。

B. 已知 $a > 1$ ，若 a^{106} 乘開後的整數部分為 37 位數，且最高位數的數字為 5。若將 $(\frac{1}{a})^{53}$ 化為小數，小數點後第 n 位開始出現不為 0 的數字，且數字為 m ，則 $n+m$ 之值為_____。

C. 在坐標平面上，已知兩向量 $\vec{a} = (p, 2)$ ， $\vec{b} = (1, q)$ 在直線 $x+2y=2$ 上的正射影相同。則兩向量長度的平方和 $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$ 的最小值為_____。(請化為最簡分數)

D. 如圖(1)，若使用紅、黃、藍、綠四色將臺灣地圖中的六個直轄市(臺北市、新北市、桃園市、臺中市、臺南市、高雄市)塗色。塗色原則為顏色可重複，但每個直轄市只塗一色，相鄰的兩直轄市不可同色，且臺北市不可以塗紅色，試問塗色方法共有_____種。



圖(1)

E. 三角形 ABC 中，已知 $\angle A = 30^\circ$ ， $\overline{AB} = 14$ ， $\overline{BC} = k$ ，若合乎條件之三角形 ABC 恰有二個，則 k 的範圍為_____。

F. 坐標平面上，令 R 表由 x 軸、 y 軸及直線 $L: 3x + 4y = 48$ 所圍成之三角形區域(含邊界及內部)。若點 P 屬於 R ，且 d_1 、 d_2 、 d_3 分別表示 P 點至 x 軸、 y 軸及 L 之距離，則 $d_1 + d_2 + d_3$ 之最大值為_____。

G. 正實數數列 $\langle a_n \rangle$ 中，已知 $a_1 = 1$ ， $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 。若 $a_n = \sqrt{S_{n-1}} + \sqrt{S_n}$ ， $(n \geq 2)$ ，則 a_{106} 之值為_____。

RA380 全國公私立高中 106 學年度第三次學科能力測驗

參考答案

第壹部分：選擇題

- 1.(4) 2.(1) 3.(1) 4.(3) 5.(5) 6.(2) 7.(1)(2)(5) 8.(2)(3)(4)
9.(1)(3)(4)(5) 10.(2)(4)(5) 11.(1)(3)(5) 12.(2)(3)(5) 13.(2)(4)

第貳部分：選填題

- A. 33 B. 23 C. $\frac{41}{5}$ D. 1296 E. $7 < k < 14$ F. 16 G. 211