全國公私立高級中學 107 學年度學科能力測驗第三次聯合模擬考試

數學考科解析

考試日期：107 年 10 月 30~31 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	4	2	1	2	5	3	235	135	24	145	234	1	3	9
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	7	5	3	3	4	1	2	1	2	0	2	9	3	0
31	32	33												
7	1	6												

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 由題意可知
$a\approx 497\times 0.589\approx 293$ ；$b\approx 734\times 0.422\approx 310$ ；
$c\approx 851\times 0.296\approx 252$ ；$d\approx 1534\times 0.211\approx 324$ ；
$e\approx 2697\times 0.137\approx 369$
所以$c<a<b<d<e$ ，故選(3)

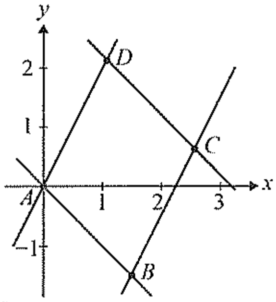
2. ① $k=-2$ ，$L:y=1$ ，直線 L 不通過第四象限
② $k^2-2k-19=0\Rightarrow k=1\pm\sqrt{20}$ 不是整數，不合題意
③ $k\neq -2$ ，直線 L 的 x 截距為$\dfrac{k-9}{k+2}$ ；y 截距為$\dfrac{k-9}{k^2-2k-19}$ ，
依題意，直線 L 不通過第四象限，所以
$$\begin{cases}\dfrac{k-9}{k+2}<0\\ \dfrac{k-9}{k^2-2k-19}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(k-9)(k+2)<0\\(k-9)(k^2-2k-19)>0\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}-2<k<9\\1-\sqrt{20}<k<1+\sqrt{20}\text{ 或 }9<k\end{cases}\Rightarrow -2<k<1+\sqrt{20}$$
由①②③且 k 為整數，所以$k=-2,-1,0,1,2,3,4,5$ 共 8 個
故選(4)

3. 將 37 人分成 30 人，5 人，2 人三組報名，
最少郵寄費用為 800+200+100=1100(元)，故選(2)

4. 因為$m_1=\dfrac{\log_a 5-\log_a 2}{5-2}=\dfrac{\log_a\frac{5}{2}}{3}$ ，
$$m_2=\dfrac{\log_{a^2}5-\log_{a^2}2}{5-2}=\dfrac{\log_{a^2}\frac{5}{2}}{3}=\dfrac{\frac{1}{2}\log_a\frac{5}{2}}{3}$$
所以$\dfrac{m_2}{m_1}=\dfrac{1}{2}$ ，故選(1)

5. ① 某條路線搭乘 3 次，另兩條路線各搭 1 次。
$$C_1^3\times C_2^2\times\frac{5!}{3!\times 1!\times 1!}=60$$
② 某條路線搭乘 1 次，另兩條路線各搭 2 次
$$C_1^3\times C_2^2\times\frac{5!}{1!\times 2!\times 2!}=90$$
由①②可知共有$60+90=150$ 種不同的搭車計畫，故選(2)

6. 如圖，L_1,L_3 交於點 A ；
L_1,L_4 交於點 B ；
L_2,L_3 交於點 D ；
則 $A(0,0)$ ，
$B(\dfrac{b}{3},-\dfrac{b}{3})$ ，
$D(\dfrac{a}{3},\dfrac{2a}{3})$ ，



所以$\overrightarrow{AB}=(\dfrac{b}{3},-\dfrac{b}{3})$ ，$\overrightarrow{AD}=(\dfrac{a}{3},\dfrac{2a}{3})$

平行四邊形面積為$\left|\begin{vmatrix}\frac{b}{3}&-\frac{b}{3}\\ \frac{a}{3}&\frac{2a}{3}\end{vmatrix}\right|=\sqrt{10}\Rightarrow ab=3\sqrt{10}$
平行四邊形周長為
$$2\left(\sqrt{(\frac{b}{3})^2+(\frac{-b}{3})^2}+\sqrt{(\frac{a}{3})^2+(\frac{2a}{3})^2}\right)=2\times\frac{\sqrt{2}b+\sqrt{5}a}{3}$$
由算幾不等式
$$\frac{\sqrt{2}b+\sqrt{5}a}{2}\geq\sqrt{\sqrt{2}b\times\sqrt{5}a}\Rightarrow\sqrt{2}b+\sqrt{5}a\geq 2\sqrt{\sqrt{2}b\times\sqrt{5}a}=2\sqrt{30}$$
所以平行四邊形周長為$2\times\dfrac{\sqrt{2}b+\sqrt{5}a}{3}\geq\dfrac{2}{3}\times 2\sqrt{30}=\dfrac{4}{3}\sqrt{30}$ ，
故選(5)

7. $C:x^2+y^2-(2m+2)x-(2m+6)y-5=0$
$\Rightarrow C:(x-m-1)^2+(y-m-3)^2=2m^2+8m+15$
圓心為$(m+1,m+3)$ ，半徑$\sqrt{2m^2+8m+15}$
因為圓心落在第二象限，所以$\begin{cases}m+1<0\\m+3>0\end{cases}\Rightarrow -3<m<-1$ ，
且 m 為整數，所以$m=-2$
半徑$\sqrt{2\times(-2)^2+8\times(-2)+15}=\sqrt{7}$ ，圓的面積為 7π ，
故選(3)

二、多選題

8. 已知方程式 $x^2+bx+c=0$ 的兩根之和，與 $x^2+bx+d=0$ 的兩根之和均為$-b$ ，
(1) 若$\alpha=-\sqrt{3}+2$ ，則四個根 1，4， $\alpha=-\sqrt{3}+2$ ，
β 必須分成兩組，使兩組中的兩根之和相同；
所以$1+4=-\sqrt{3}+2+\beta$ ，$\beta=\sqrt{3}+3$
(2) 方程式$(x^2+bx+c)(x^2+bx+d)=0$ 為四次實係數方程式，
所以虛根成對，若$\alpha=\dfrac{5}{2}+2i$ ，則$\beta=\dfrac{5}{2}-2i$
(3) 若$\alpha=5$ ，$\beta=2$ 則四個根可以分成 1，5 一組；2，4 一組。
此時$b=-6$ ；
(4) 若$\alpha=5$ ，$\beta=3$ 則四個根 1，3，4，5 均無法分成兩組，
使兩組中的兩根之和相同；
(5) 若$\alpha=5$ ，$\beta=8$ 則四個根可以分成
1，8 一組；4，5 一組。此時$b=-9$ ；
故選(2)(3)(5)

9. (1) 因為$\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ 為某一試驗的樣本空間 的一個分割
所以$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)=1$
$\Rightarrow x+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}=1\Rightarrow x=\dfrac{1}{3}$
(2) 若 A_1 與事件 D 為互斥事件，則$P(D\mid A_1)=y=0$
(3) $P(D)=P(A_1)\times P(D\mid A_1)+P(A_2)\times P(D\mid A_2)+$
$P(A_3)\times P(D\mid A_3)+P(A_4)\times P(D\mid A_4)$
$\Rightarrow P(D)=\dfrac{1}{3}\times 0+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{48}$

(4) 若 A_1 與事件 D 爲獨立事件，則 $P(D)=P(D\mid A_1)$

$$\Rightarrow P(D)=\frac{1}{3}\times y+\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{12}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}=y\Rightarrow y=\frac{5}{32}$$

(5) 若 A_2 與事件 D 爲獨立事件，則 $P(D)=P(D\mid A_2)$

$$\Rightarrow P(D)=\frac{1}{3}\times y+\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{12}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}\Rightarrow y=\frac{3}{16}$$

故選(1)(3)(5)

10. $f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_8)^2$

$$=8\left(x-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_8}{8}\right)^2+k=8(x-h)^2+k$$

$$\begin{cases}8(4-h)^2+k=104\\8(6-h)^2+k=72\\8(7-h)^2+k=80\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(4-h)^2-(6-h)^2=4\\(7-h)^2-(6-h)^2=1\end{cases}\Rightarrow h=6,k=72$$

所以 $f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_8)^2=8(x-6)^2+72$

$\mu_a=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_8}{8}=h=6$，

$$\sigma_a=\sqrt{\frac{(6-a_1)^2+(6-a_2)^2+\cdots+(6-a_8)^2}{8}}=\sqrt{\frac{f(6)}{8}}=3$$

故選(2)(4)

11. $\mu_x=\dfrac{1+3+5+7}{4}=4$，$\mu_y=\dfrac{8+12+4+0}{4}=6$

$$r_1=\frac{(1-4)(8-6)+(3-4)(12-6)+(5-4)(4-6)+(7-4)(0-6)}{\sqrt{(1-4)^2+(3-4)^2+(5-4)^2+(7-4)^2}\times\sqrt{(8-6)^2+(12-6)^2+(4-6)^2+(0-6)^2}}$$

$=-0.8$

$$m_1=\frac{\sum_{k=1}^{4}(x_k-\mu_x)(y_k-\mu_y)}{\sum_{k=1}^{4}(x_k-\mu_x)^2}$$

$$=\frac{(1-4)(8-6)+(3-4)(12-6)+(5-4)(4-6)+(7-4)(0-6)}{(1-4)^2+(3-4)^2+(5-4)^2+(7-4)^2}$$

$=-1.6$

由分布圖可看出，當 $E(a,b)=(10,10)$ 時，相關度降低，

但因爲資料是負相關所以 $r_1<r_2$

當 $E(a,b)=(4,6)$ 時，

$$r_2=\frac{(1-4)(8-6)+(3-4)(12-6)+(5-4)(4-6)+(7-4)(0-6)+(4-4)(6-6)}{\sqrt{(1-4)^2+(3-4)^2+(5-4)^2+(7-4)^2+(4-4)^2}\times\sqrt{(8-6)^2+(12-6)^2+(4-6)^2+(0-6)^2+(6-6)^2}}$$

$=-0.8$

$$m_2=\frac{(1-4)(8-6)+(3-4)(12-6)+(5-4)(4-6)+(7-4)(0-6)+(4-4)(6-6)}{(1-4)^2+(3-4)^2+(5-4)^2+(7-4)^2+(4-4)^2}$$

$=-1.6$

故選(1)(4)(5)

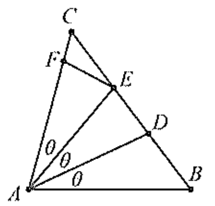
12. 由題意可知，

$\Delta DAE\cong\Delta EAF$，$\Delta BAD\cong\Delta CAE$

所以 $\overline{DE}=\overline{EF}$，$\overline{BD}=\overline{CE}$

在 ΔEFC 中，

$\angle EFC=90^\circ+\dfrac{\theta}{2}$，$\angle ECF=90^\circ-\dfrac{3\theta}{2}$



由正弦定理

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{CE}}=\frac{\sin(90^\circ-\frac{3\theta}{2})}{\sin(90^\circ+\frac{\theta}{2})}=\frac{\cos(\frac{3\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})}=\frac{4(\cos(\frac{\theta}{2}))^3-3\cos(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})}$$

$$=4(\cos(\frac{\theta}{2}))^2-3=4\times\frac{1+\cos\theta}{2}-3=2\cos\theta-1$$

因爲 $0^\circ<\theta<60^\circ\Rightarrow 2\cos 60^\circ-1<2\cos\theta-1<2\cos 0^\circ-1$

$\Rightarrow 0<2\cos\theta-1<1$，所以 $\overline{BD}>\overline{ED}$，故選(2)(3)(4)

第貳部分：選填題

A. 已知 $f(2)=11$；$f(3)=9$；$f(5)=5$，

所以 $\begin{cases}4a+2b+c=11\\9a+3b+c=9\\25a+5b+c=5\end{cases}\Rightarrow a=0,b=-2,c=15$，

故 $a+b+c=13$

B. 已知

$$f(m)=a^m+a^{-m}=5\Rightarrow(a^m+a^{-m})^2=25\Rightarrow a^{2m}+2+a^{-2m}=25$$

$$f(n)=a^n+a^{-n}=14\Rightarrow(a^{\frac{n}{2}}+a^{\frac{-n}{2}})^2=a^n+2+a^{-n}=16$$

$$\Rightarrow a^{\frac{n}{2}}+a^{\frac{-n}{2}}=\pm4\ (負不合)$$

$$f(2m)\times f(-\frac{n}{2})=(a^{2m}+a^{-2m})(a^{\frac{-n}{2}}+a^{\frac{n}{2}})=23\times4=92$$

C. $S_{10},S_{20}-S_{10},S_{30}-S_{20},\cdots$ 爲等差數列

公差之値爲

$(S_{20}-S_{10})-S_{10}$

$=(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20})-(a_1+a_2+\cdots+a_{10})$

$=(a_{11}-a_1)+(a_{12}-a_2)+\cdots+(a_{20}-a_{10})$

$=10\times\dfrac{3}{4}+10\times\dfrac{3}{4}+\cdots+10\times\dfrac{3}{4}=75$

D. 設乙選了甲的球衣，若甲也選了乙的球衣，

則選法有 $3!-3\times2!+3\times1!-1\times0!=2$ (種)

若甲選了乙以外的球衣，

則選法有 $3\times(3!-2\times2!+1\times1!)=9$ (種)，共有 11 種

乙也可能選了丙、戊的球衣，一樣各有 11 種，故共有 33 種交換方法。

＜另解＞

每人都不能拿到自己的球衣的方法有

$1\times5!-5\times4!+10\times3!-10\times2!+5\times1!-1\times0!=44$ (種)

乙球員拿到其他每一位球員的球衣的機會都均等，

所以乙不選丁的球衣的方法有 $44\times\dfrac{3}{4}=33$ (種)

E. 依題意 $r=\dfrac{C_{11}^{12}\times C_1^{12}}{C_{12}^{24}}+\dfrac{C_1^{12}\times C_{11}^{12}}{C_{12}^{24}}=\dfrac{2\times12\times12}{C_{12}^{24}}$；

$$R=\frac{C_{10}^{12}\times C_2^{12}}{C_{12}^{24}}+\frac{C_2^{12}\times C_{10}^{12}}{C_{12}^{24}}=\frac{2\times66\times66}{C_{12}^{24}}$$

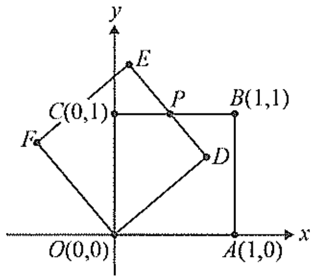
所以 $\dfrac{r}{R}=\dfrac{\frac{2\times12\times12}{C_{12}^{24}}}{\frac{2\times66\times66}{C_{12}^{24}}}=\dfrac{4}{121}$

F. 由題意可知 $\angle AOD=\theta$，

$\angle DOP=45^\circ-\dfrac{\theta}{2}$，

$ODPC$ 的面積爲

$2\times(\dfrac{1}{2}\times\overline{OD}\times\overline{DP})=\dfrac{2}{5}$



$\Rightarrow 1\times(1\times\tan(45^\circ-\dfrac{\theta}{2}))=\dfrac{2}{5}$

$\Rightarrow\tan(45^\circ-\dfrac{\theta}{2})=\dfrac{2}{5}$

$\Rightarrow\cos(45^\circ-\dfrac{\theta}{2})=\dfrac{5}{\sqrt{29}},\sin(45^\circ-\dfrac{\theta}{2})=\dfrac{2}{\sqrt{29}}$

$\Rightarrow\cos(90^\circ-\theta)=2(\cos(45^\circ-\dfrac{\theta}{2}))^2-1=\dfrac{21}{29},\sin(90^\circ-\theta)=\dfrac{20}{29}$

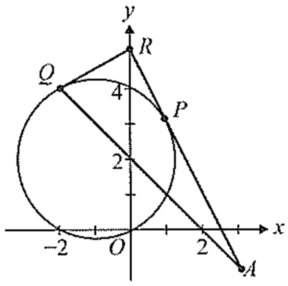
所以 $s=1\times\cos\theta=\dfrac{20}{29}$

G. $C:(x+1)^2+(y-2)^2=5$ ，

點 $A(3,-1)$ 在圓外，

$\overline{AP}=\sqrt{(3+1)^2+(-1-2)^2-5}$

$=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$



如圖，當 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$ 有最大值時，

$\overline{QR}\perp\overline{AR}$ ，$\overline{QR}$ 爲圓 C 的切線段

且 R 在直線 $\overline{AP}$ 上，

所以 $\overline{QR}=\overline{PR}=r=\sqrt{5}$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overline{AP}\times\overline{AR}=\overline{AP}\times(\overline{AP}+\sqrt{5})$

$=2\sqrt{5}\times 3\sqrt{5}$

$=30$

H. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2}=\dfrac{5^2+6^2-7^2}{2}=6$

$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=x\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+y\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=x\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}1\times 5=25x+6y\\ 2\times 6=6x+36y\end{cases}$

$\Rightarrow x=\dfrac{1}{8},\ y=\dfrac{5}{16}$

故 $x+y$ 之值爲 $\dfrac{7}{16}$