數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
答案	(4)	(3)	(2)	(3)	(2)	(1)(4)	(1)(2)(5)	(2)(4)(5)	(1)(5)
題號	10.								
答案	(1)(4)								

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (4)

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：數列的概念與級數的計算

解析：$(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{15})+(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+15^2)=1495$

$\Rightarrow a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{15}+\dfrac{15\times16\times31}{6}=1495$

$\Rightarrow a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{15}=1495-1240=255$

$\Rightarrow \dfrac{15(a_1+a_{15})}{2}=255 \Rightarrow \dfrac{a_1+a_{15}}{2}=17$

中位數 $a_8=\dfrac{a_1+a_{15}}{2}=17$

故選(4)。

2. (3)

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：絕對值不等式的討論與幾何運用

解析：可由與 0 和 6 的距離差推得：

① $|x|-|x-6|=2$，則 $x=4$

② $|x|-|x-6|=-2$，則 $x=2$

③ $|x|-|x-6|=1$，則 x 無整數解

④ $|x|-|x-6|=-1$，則 x 無整數解

⑤ $|x|-|x-6|=0$，則 $x=3$

故 $x=2$，3，4，共 3 個

故選(3)。

〈另解〉

分段討論

①若 $x<0$ 時，

$||x|-|x-6||=|-x-(6-x)|=6$ 不合

故無解

②若 $0\leq x<6$ 時，

$||x|-|x-6||=|x-(6-x)|\leq 2$

$\Rightarrow |2x-6|\leq 2 \Rightarrow 2\leq x\leq 4$

整數值為 2，3，4，共 3 個

③ $x\geq 6$ 時，

$||x|-|x-6||=|x-(x-6)|=6$ 不合

故無解

由①、②、③知共 3 個

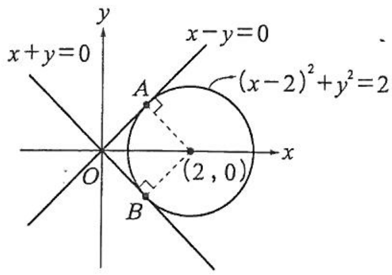
故選(3)。

3. (2)

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：直線與圓的相交關係

解析：配方可得



Γ_1：$(x-2)^2+y^2=2$，即圓心為 $(2,0)$，半徑為 $\sqrt{2}$ 的圓

Γ_2：$x+y=0$ 或 $x-y=0$，圖形為相交兩直線

將 Γ_1，Γ_2 畫在直角坐標系可得如右：

交於 A、B 兩點

故選(2)。

4. (3)

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：發現數列的規律性

解析：令〈a_n〉為小夫每次所堆球數的數列

〈b_n〉為胖虎每次所堆球數的數列

$$\begin{cases} a_1=4 \\ a_{n+1}=2a_n+1，n\in N \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1=1 \\ b_{n+1}=3b_n，n\in N \end{cases}$$

〈a_n〉：4，9，19，39，79，159，319

〈b_n〉：1，3，9，27，81，243，729

$\therefore n\geq 7$

故選(3)。

註：$a_n=5\times 2^{n-1}-1$，$b_n=3^{n-1}$，$n\in N$

5. (2)

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：直線排列

解析：第一種情況：亮亮老師一天有 3 節課

①當上午有 3 節課且下午沒課時，
可排 1、2、4 節或 1、3、4 節
有 2 種排課方法

②當上午有 2 節課且下午有 1 節課時，
有 $\underbrace{C_2^3}_{\text{不排第4節}}\times C_1^3+C_1^3\times\underbrace{C_1^1}_{\text{排第4節}}\times C_1^2=15$ 種排課方法

③當上午有 1 節課且下午有 2 節課時，
有 $\underbrace{C_1^3}_{\text{不排第4節}}\times C_2^3+\underbrace{C_1^1}_{\text{排第4節}}\times C_2^2=10$ 種排課方法

第二種情況：亮亮老師一天有 4 節課

①當上午有 3 節課且下午有 1 節課時，
有 $\underbrace{2}_{\text{上午排1、2、4節或1、3、4節}}\times C_1^2=4$ 種排課方法

②當上午有 2 節課且下午有 2 節課時，
有 $\underbrace{C_2^3}_{\text{不排第4節}}\times C_2^3+\underbrace{C_1^3}_{\text{排第4節}}\times C_2^2=12$ 種排課方法

第三種情況：亮亮老師一天有 5 節課

所以上午有 3 節課且下午有 2 節課，
有 $2\times C_2^2=2$ 種排課方法

由以上可知共有 45 種排課方法

故選(2)。

二、多選題

6. (1)(4)

出處：第一冊第一章〈數與式〉、第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：基本的整數、無理數、指數與對數的化簡與分點公式的估計應用

解析：$a<b$，利用分點公式可知四數 x，y，z，t 皆在 a，b 之間

不失一般性，假設 $a=0$，$b=1$ 分別代入四數

可得 $x=\dfrac{3}{5}=0.6$，$y=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\approx 0.55$，

$z=\dfrac{8}{4+8}\approx 0.67$，$t=\dfrac{\log 3}{\log 2+\log 3}\approx 0.61$

$\therefore z>t>x>y$

故選(1)(4)。

7. (1)(2)(5)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：多項式的餘式定理、插值多項式與勘根定理的應用

解析：$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$

$\Rightarrow f(0)=1$，$f(1)=-3$，$f(2)=1$，$f(4)=-15$

又因為 $f(x)$ 的最高次係數為 1

所以一定找得到 $k>4$ 且 $f(k)>0$

$f(0)\cdot f(1)<0$，$f(1)\cdot f(2)<0$，$f(2)\cdot f(4)<0$，$f(4)\cdot f(k)<0$

由勘根定理可得知 $f(x)=0$ 有四個相異實根

故知在 $(0,1)$，$(1,2)$，$(2,4)$，$(4,\infty)$ 四個區間內各恰有一個實根

令 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-4)+mx(x-1)(x-2)+nx(x-1)+px+1$

$f(1)=-3\Rightarrow p+1=-3\Rightarrow p=-4$

$f(2)=1\Rightarrow 2n-8+1=1\Rightarrow n=4$

$f(4)=-15\Rightarrow 24m+48-16+1=-15\Rightarrow m=-2$

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=x(x-1)(x-2)(x-4)-2x(x-1)(x-2)+4x(x-1)-4x+1\\&=x(x-1)\cdot[(x-2)(x-4)-2(x-2)+4]-4x+1\\&=x(x-1)(x-2)\cdot[(x-4)-2]+4x^2-8x+1\\&=x(x-1)(x-2)(x-4)-2x^3+10x^2-12x+1\end{aligned}$$

故選(1)(2)(5)。

8. (2)(4)(5)

出處：第一冊第一章〈數與式〉、第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：不等式的應用與指對數函數圖形的凹向性

解析：(1)╳：由柯西不等式可得

$$\left[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{2b})^2\right]\left[\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{2}{b}}\right)^2\right]\geq(1+2)^2=9$$

所以大於等於 15 不合

(2)○：由算幾不等式可得

$$\frac{a+\frac{4}{a}}{2}\geq 2\quad\therefore a+\frac{4}{a}\geq 4$$

$$\frac{b+\frac{1}{b}}{2}\geq 1\quad\therefore b+\frac{1}{b}\geq 2$$

故 $\left(a+\dfrac{4}{a}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2\geq 16+4=20$

(3)╳：$\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} \geq \sqrt{\dfrac{1}{ab}}$

將左式分子分母同乘 ab 可得 $\dfrac{b+a}{2ab} \geq \sqrt{\dfrac{1}{ab}}$

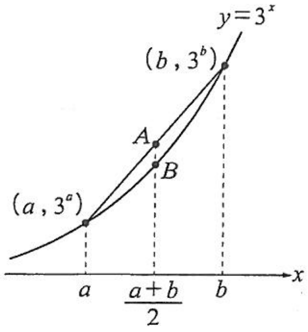
兩邊同取倒數得 $\dfrac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$

(4)○：如圖(一)，$y=3^x$ 圖形凹口向上

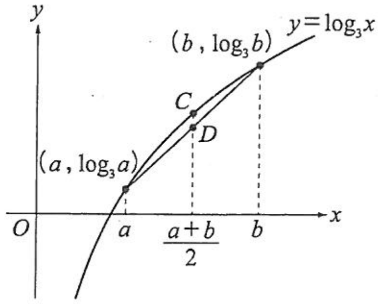
比較 A、B 兩點的 y 坐標可得 $\dfrac{3^a+3^b}{2} \geq 3^{\frac{a+b}{2}}$

(5)○：如圖(二)，$y=\log_3 x$ 圖形凹口向下

比較 C、D 兩點的 y 坐標可得 $\log_3 \dfrac{a+b}{2} \geq \dfrac{\log_3 a+\log_3 b}{2}$



圖(一)



圖(二)

故選(2)(4)(5)。

9. (1)(5)

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：相關係數、迴歸直線的定義與關係

解析：(1)(2)：時間 X 的平均數 $\mu_X=\dfrac{32+30+36+40+27}{5}=33$

因為 (μ_X, μ_Y) 在迴線直線上

將 $(33, \mu_Y)$ 代入 $y=\dfrac{12}{13}x-\dfrac{84}{13}$

可得 $\mu_Y=24$

$\therefore$(1)○；(2)╳

(3)╳：$\mu_Y=\dfrac{25+18+26+a+20}{5}=24$

可得 $a=31$

(4)╳：X 的標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{(32-33)^2+(30-33)^2+(36-33)^2+(40-33)^2+(27-33)^2}{5}}$

$=\sqrt{20.8}>4$

(5)○：Y 的標準差 $\sigma_Y=\sqrt{\dfrac{(25-24)^2+(18-24)^2+(26-24)^2+(31-24)^2+(20-24)^2}{5}}$

$=\sqrt{21.2}$

$\dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}=\dfrac{\sqrt{20.8}}{\sqrt{21.2}}<1$

迴歸直線斜率為 $\dfrac{12}{13}=r\cdot\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}$

$\Rightarrow$ 相關係數 $r=\dfrac{12}{13}\times\dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}<\dfrac{12}{13}$

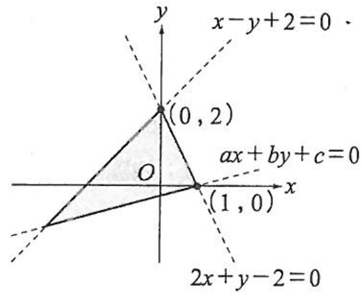
故選(1)(5)。

10. (1)(4)

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：線性規劃中可行解區域與直線關係

解析：由右圖可知



(1)○：若 $a>0$，$ax+by+c\le 0$ 為左半平面

$a<0$，$ax+by+c\le 0$ 為右半平面

故 $a>0$

(2)╳：若 $b>0$，$ax+by+c\le 0$ 為下半平面

$b<0$，$ax+by+c\le 0$ 為上半平面

故 $b<0$

(3)╳：$ax+by+c=0$ 交 y 軸於點 $\left(0,-\dfrac{c}{b}\right)$，且 $-\dfrac{c}{b}<0$

因為 $b<0$，故 $c<0$

(4)○：$ax+by+c=0$ 過點 $(1,0)$，代入可得 $a+c=0$

(5)╳：目標函數 $px-y$ 由一組斜率為 p 的平行線，且往上遞減欲使其在 $(0,2)$ 有最小值

則 p 須滿足 $-2\le p\le 1$

故選(1)(4)。

第貳部分：選填題

A. 3

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：對數函數的運算

解析：$y=\log_{10}(x+1)$

$(a,3)$ 代入得 $3=\log_{10}(a+1)\Rightarrow a=999$

$(1,b)$ 代入得 $b=\log_{10}(1+1)=\log_{10}2$

$(4,c)$ 代入得 $c=\log_{10}(4+1)=\log_{10}5$

$$\begin{aligned}\therefore \log_{10}(a+b+c)&=\log_{10}(999+\log_{10}2+\log_{10}5)\\&=\log_{10}(999+1)\\&=\log_{10}1000=3\end{aligned}$$ 。

B. $\dfrac{3}{5}$

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：條件機率之運算

解析：刮出相同字母有 $C_2^4+C_2^3+C_2^2=10$ 種方法

獲得一獎(同時刮出 A)有 $C_2^4=6$ 種方法

故機率為 $\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$ 。

C. $\dfrac{2}{9}$

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、第二冊第三章〈機率〉

目標：二次方程式的根與係數關係、機率的運用

解析：$x^2-2(a-2)x-b^2+10=0$

利用根與係數法得，有兩個正根的條件為

$$\begin{cases}2(a-2)>0\\-b^2+10>0\\4(a-2)^2+4b^2-40\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>2\\b^2<10\\(a-2)^2+b^2\ge 10\end{cases}$$

$\therefore$ 數對 $(a,b)=(3,3)$，$(4,3)$，$(5,1)$，$(5,2)$，$(5,3)$，$(6,1)$，$(6,2)$，$(6,3)$

故所求機率為 $\dfrac{8}{6\times 6}=\dfrac{2}{9}$ 。

D. $\dfrac{360}{11}$

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：弧度的運算

解析：當分針走一分鐘時，時針移動的弧度為 $\dfrac{2\pi}{12}\cdot\dfrac{1}{60}=\dfrac{\pi}{360}$

當分針走一分鐘時，分針移動的弧度為 $\dfrac{2\pi}{60}=\dfrac{\pi}{30}$

$\therefore$3 點 n 分時的夾角為

$$n\cdot\frac{\pi}{30}-\frac{2\pi}{12}\cdot 3-n\cdot\frac{\pi}{360}=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{11}{360}\cdot n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$$\Rightarrow n=\frac{360}{11}\text{。}$$

E. 18

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：平面向量與面積的運算

解析：$t>0$，$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{1+t^2}$，$|\overrightarrow{b}|=2\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{c}|=4\sqrt{1+t^2}$

$\because|\overrightarrow{a}|$，$|\overrightarrow{b}|$，$|\overrightarrow{c}|$成等比數列

$\therefore|\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{c}|\Rightarrow 20=4(1+t^2)\Rightarrow t=2\ (\because t>0)$

$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(1,2)-(4,2)=(-3,0)$

$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}=(1,2)-(4,8)=(-3,-6)$

$\therefore\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}$ 所張成的平行四邊形面積為 $\left|\begin{vmatrix}-3 & 0\\ -3 & -6\end{vmatrix}\right|=18$。

F. 8

出處：第一冊第三章〈多項式函數〉、第三冊第一章〈三角〉

目標：根與係數的關係、三角函數的基本關係

解析：由根與係數的關係可得，另一根為 $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

兩根之和 $-2(\sin\theta+\cos\theta)=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}=\sqrt{5}$，故 $\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

將兩邊平方可得 $1+2\sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{5}{4}\Rightarrow\sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{1}{8}$

$$\therefore\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=8\text{。}$$

G. $20x+24$

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：多項式的運算與除法原理

解析：由除法原理得知，可令 $g(x)=(x+1)Q(x)+5$ ……………①

$(f(x))^2=[(x+1)g(x)+2]^2$

$=(x+1)^2(g(x))^2+4(x+1)g(x)+4$ ……………………②

將①代入②得

$(f(x))^2=(x+1)^2(g(x))^2+4(x+1)[(x+1)Q(x)+5]+4$

$=(x+1)^2(g(x))^2+4(x+1)^2Q(x)+20(x+1)+4$

$=(x+1)^2[(g(x))^2+4Q(x)]+20x+24$

故餘式為 $20x+24$。

H. 3

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：貝氏定理的應用

解析：利用貝氏定理可知

$$\frac{8}{25}=\frac{\frac{40}{100}\cdot\frac{5}{100}}{\frac{40}{100}\cdot\frac{5}{100}+\frac{35}{100}\cdot\frac{10}{100}+\frac{25}{100}\cdot\frac{x}{100}}$$

$$\Rightarrow\frac{8}{25}=\frac{40\cdot 5}{40\cdot 5+35\cdot 10+25\cdot x}$$

$$\Rightarrow\frac{8}{25}=\frac{8}{8+14+x}$$

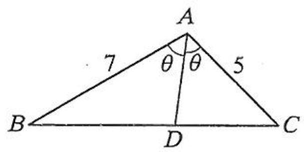
$\Rightarrow 25=22+x\Rightarrow x=3$。

I. $\frac{84}{5}$

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：三角形面積公式與三角函數的基本關係

解析：如右圖，令$\angle BAD=\angle CAD=\theta$，$\overline{AB}=7$，$\overline{AC}=5$，$\overline{AD}=\frac{7}{2}$



$\triangle ABC$ 面積＝$\triangle ABD$ 面積＋$\triangle ACD$ 面積

由面積公式得

$$\frac{1}{2}\times 7\times 5\times\sin 2\theta=\frac{1}{2}\times 7\times\frac{7}{2}\times\sin\theta+\frac{1}{2}\times 5\times\frac{7}{2}\times\sin\theta$$

由 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cdot\cos\theta$，將上式 $\frac{1}{2}\times 7\times\sin\theta$ 約分可得

$$5\times 2\times\cos\theta=\frac{7}{2}+\frac{5}{2}\Rightarrow\cos\theta=\frac{3}{5}，\sin\theta=\frac{4}{5}$$

$$\therefore\sin 2\theta=2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$$

故$\triangle ABC$ 面積為 $\frac{1}{2}\times 7\times 5\times\frac{24}{25}=\frac{84}{5}$。

J. $3+2\sqrt{2}$

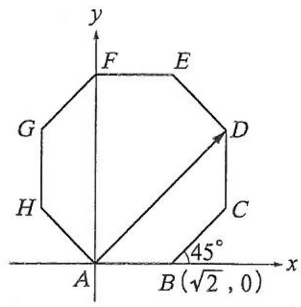
出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：平面向量的線性組合

解析：將 A 定為原點，且正八邊形邊長令為 $\sqrt{2}$

建立坐標系，如右圖

正八邊形的每一內角為 135°



$\overrightarrow{BC}=(\sqrt{2}\cdot\cos 45°,\ \sqrt{2}\cdot\sin 45°)=(1,1)$

$\overrightarrow{CD}=(0,\sqrt{2})$

可得 $\overrightarrow{AB}=(\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{AH}=(-1,1)$，

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(\sqrt{2}+1,\sqrt{2}+1)$$

代入 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AH}$ 可得

$(\sqrt{2}+1,\sqrt{2}+1)=x(\sqrt{2},0)+y(-1,1)=(\sqrt{2}x-y,y)$

$$故\begin{cases}\sqrt{2}x-y=\sqrt{2}+1\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①\\ y=\sqrt{2}+1\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②\end{cases}$$

將②代入①得 $x=2+\sqrt{2}$

故 $x+y=2+\sqrt{2}+\sqrt{2}+1=3+2\sqrt{2}$。