台中區高中 108 年(107 學年度)
高三上第一次學測模擬考數學(107-1)試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（占 60 分）

一、單選題（占 30 分）

1. 櫻桃家族成員有爺爺、奶奶、爸爸、媽媽、姐姐、小丸子，一家六口要去照相館拍全家福照，有六張椅子排成一列供拍照者就坐，然而因前一晚某些爭吵導致爺爺與爸爸不相鄰、爸爸與媽媽不相鄰、媽媽與姐姐不相鄰，請問攝影師有幾種安排座位的排法？
(1) 132　(2) 180　(3) 240　(4) 276　(5) 426 。【108 中區學測模①】

答：(2)

解：

$$\underbrace{6!}_{\left(\text{爺、奶、爸、媽、姊、丸任意排}\right)} - \underbrace{3\times5!\times2}_{\left(\text{爺爸相鄰}\right)\text{或}\left(\text{爸媽相鄰}\right)\text{或}\left(\text{媽姐相鄰}\right)} + \underbrace{2\times\left(4!\times2\right)}_{\left(\text{爺爸相鄰且爸媽相鄰}\right)\text{或}\left(\text{爸媽相鄰且媽姐相鄰}\right)} + \underbrace{4!\times2^2}_{\left(\text{爺爸相鄰且媽姐相鄰}\right)} - \underbrace{3!\times2}_{\left(\text{爺爸相鄰且爸媽相鄰且媽姐相鄰}\right)}$$

$=720-720+96+96-12=180$

2. 擲一個公正的正四面體骰子（四面點數分別為1、2、3、4）二次，設第一次擲出點數為a，第二次擲出點數為b，求直線L：$ax+2y=3a+1$與圓C：$x^2+y^2=b^2$相交的機率為多少？
(1) $\frac{7}{16}$　(2) $\frac{1}{2}$　(3) $\frac{9}{16}$　(4) $\frac{5}{8}$　(5) $\frac{11}{16}$ 。【108 中區學測模①】

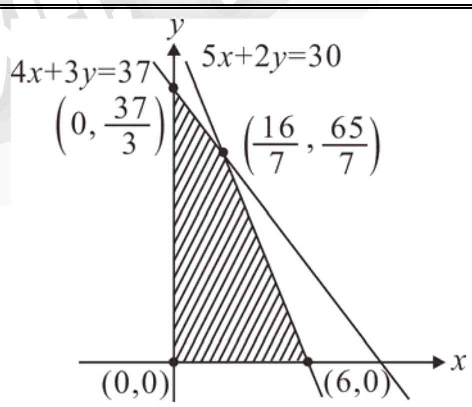
答：(3)

解：相交滿足 $\frac{|3a+1|}{\sqrt{a^2+4}}\le b \Rightarrow$

a	1	2	3	4
$\frac{\lvert 3a+1\rvert}{\sqrt{a^2+4}}$	$\frac{4}{\sqrt{5}}\approx1.7\cdots$	$\frac{7}{\sqrt{8}}\approx2.4\cdots$	$\frac{10}{\sqrt{13}}\approx2.7\cdots$	$\frac{13}{\sqrt{20}}\approx2.9\cdots$
b	$2,3,4$	$3,4$	$3,4$	$3,4$

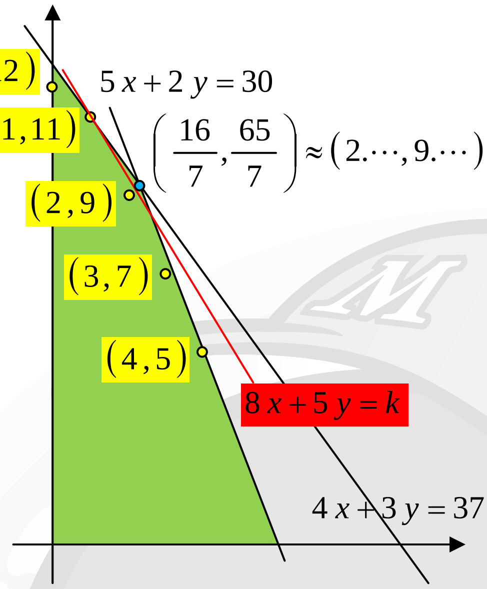
機率：$\frac{3+2+2+2}{4\times4}=\frac{9}{16}$

3. 已知可行解區域為$\begin{cases}x\ge0\\y\ge0\\5x+2y\le30\\4x+3y\le37\end{cases}$，$x$、$y\in Z$，如右圖，求目標函數$f\left(x,y\right)=8x+5y$的最大值？
(1) 63　(2) 61　(3) 60　(4) 59　(5) 48 。
【108 中區學測模①】



答：(1)

解：



先由$\left(\frac{16}{7},\frac{65}{7}\right)$
$\approx(2.\cdots,9.\cdots)$
向內找格子點$(2,9)$
再由階梯法
找出其他格子點
並代入目標函數

(x,y)	$8x+5y$
$(0,12)$	60
$(1,11)$	63
$(2,9)$	61
$(3,7)$	59
$(4,5)$	27

4. 求方程組$\begin{cases}|x-4|-y=2\\ y^2+4x=29\end{cases}$的所有解$(x,y)$中，$x$值的總和爲何？
(1)8　(2)2　(3)0　(4)−2　(5)−8。　【108 中區學測模①】

答：(2)

解：原式$\Rightarrow(|x-4|-2)^2+4x=29\Rightarrow x^2-8x+16-4|x-4|+4+4x=29$

$\Rightarrow x^2-4x-9-4|x-4|=0\Rightarrow\begin{cases}當x\geq4，則x^2-8x+7=0\Rightarrow x=7,1(不合)\\ 當x<4，則x^2-25=0\Rightarrow x=-5,5(不合)\end{cases}$

5. 若遞迴數列$\langle a_n\rangle$滿足$\begin{cases}a_1=1\\ a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n\ (n\geq1)\end{cases}$，則此數列第51項最接近下列哪一個數？
(1)10^{-5}　(2)10^{-6}　(3)10^{-7}　(4)10^{-8}　(5)10^{-9}。　【108 中區學測模①】

答：(2)

解：$a_{51}=1\times\left(\frac{3}{4}\right)^{50}\Rightarrow\log a_{51}=50(\log3-\log4)\approx-6.2469\approx-7+0.7531\approx\log5.\cdots\times10^{-7}$

6. 小明參加國防課實彈射擊，一排10個人，由右到左分別爲1～10號靶位，小明在5號靶位，每位同學每發子彈射中自己靶位的機率$\frac{4}{10}$，射中右邊同學靶位的機率$\frac{3}{10}$（例如：小明射中4號靶位），射中左邊同學靶位的機率$\frac{2}{10}$，完全沒射中的機率$\frac{1}{10}$，每人有2發子彈，射擊結束後，已知5號靶位上有2個彈孔，試問這2個彈孔均由小明射中的機率爲何？
(1)$\frac{1296}{8821}$　(2)$\frac{1296}{20665}$　(3)$\frac{16}{55}$　(4)$\frac{3136}{8821}$　(5)$\frac{3136}{20665}$。　【108 中區學測模①】

答：(5)

解：

$$\frac{\left(\frac{4}{10}\right)^2\left[\frac{7}{10}\right]^2\left[\frac{8}{10}\right]^2}{\begin{aligned}&\left(\frac{4}{10}\right)^2\left[\frac{7}{10}\right]^2\left[\frac{8}{10}\right]^2\\&+\left[\frac{6}{10}\right]^2\left(\frac{3}{10}\right)^2\left[\frac{8}{10}\right]^2\\&+\left[\frac{6}{10}\right]^2\left[\frac{7}{10}\right]^2\left(\frac{2}{10}\right)^2\\&+\left(\frac{4}{10}\right)\left[\frac{6}{10}\right]\times2\times\left(\frac{3}{10}\right)\left[\frac{7}{10}\right]\times2\times\left[\frac{8}{10}\right]^2\\&+\left(\frac{4}{10}\right)\left[\frac{6}{10}\right]\times2\times\left[\frac{7}{10}\right]^2\times\left(\frac{2}{10}\right)\left[\frac{8}{10}\right]\times2\\&+\left[\frac{6}{10}\right]^2\times\left(\frac{3}{10}\right)\left[\frac{7}{10}\right]\times2\times\left(\frac{2}{10}\right)\left[\frac{8}{10}\right]\times2\end{aligned}}=\frac{50176}{\begin{aligned}&50176\\&+20736\\&+7056\\&+129024\\&+75264\\&+48384\end{aligned}}=\frac{50176}{330640}=\frac{3136}{20665}$$

二、多選題（占 30 分）

7. 下列敘述何者正確？

(1)若 a 、 b 爲異於 0 之實數，若 $a>b$ ，則 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

(2)沒有實數 x 滿足 $|x-2|+|x+3|\le 4$

(3)若 a 、 c 爲有理數， b 、 d 爲無理數，且 $a+b=c+d$ ，則 $a=c$ ， $b=d$

(4) $a<0$ 、 $b<0$ ，則 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$

(5)數線上 A 點坐標爲 a ， B 點坐標爲 b ，滿足 $\overline{PA}$ ： $\overline{PB}=m$ ： n ，

則 P 點坐標爲 $\frac{na+mb}{m+n}$ 。 【108 中區學測模①】

答：(2)

解：(1)必須 a 、 b 同號才成立

(2) $|x-2|+|x+3|\ge 5$ 恆成立，故 $|x-2|+|x+3|\le 4$ 無解

(3)反例： $a=3$ 、 $b=\sqrt{2}$ 、 $c=2$ 、 $d=1+\sqrt{2}$

(4)應爲： $a<0$ 、 $b<0$ ，則 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

(5) P 點坐標應爲： $\frac{na+mb}{m+n}$ （內分點）或 $\frac{-na+mb}{m-n}$ （外分點）

8. 坐標平面上，直線 $y=k$ （ $k>0$ ）與函數 $y=3^x$ 、 $y=9^x$ 的圖形分別交於 A 、 B 兩點。 $d_k=\overline{AB}$ 代表 A 、 B 兩點的距離，下列何者正確？

(1) $d_1=6$　(2) $d_3=\dfrac{1}{2}$　(3) A在B右側　(4) d_3，d_9，d_{27}三數成等差數列

(5) $d_k=\log_9 k$。　【108 中區學測模①】

答：(2)(4)

解：(5) $A\left(\log_3 k, k\right)$、$B\left(\log_9 k, k\right) \Rightarrow d_k=\left|\log_3 k-\log_9 k\right|=\left|\log_9 k\right|$

(3)當$k>1$，A在B右側。當$0<k<1$，A在B左側

(1) $d_1=\left|\log_9 1\right|=0$　(2) $d_3=\left|\log_9 3\right|=\dfrac{1}{2}$

(4) $d_3=\left|\log_9 3\right|=\dfrac{1}{2}$、$d_9=\left|\log_9 9\right|=1$、$d_{27}=\left|\log_9 27\right|=\dfrac{3}{2}$，成等差數列

9. 設50筆資料$\left(x_i, y_i\right)$，$i=1$，2，3，……，50，平均數$\mu_x=60$，$\mu_y=60$，x與y的相關係數為0.8，y對x的迴歸直線L過點$(30,45)$，下列何者正確？

(1)迴歸直線斜率為0.8　(2)迴歸直線過點$(40,50)$　(3) x的標準差大於y的標準差

(4)若將50筆資料標準化，得到新數據$\left(x_i', y_i'\right)$，則y'對x'的迴歸直線斜率為0.8

(5)若第51筆資料的$y_{51}=80$，則可用50筆資料的迴歸直線L預測$x_{51}=100$。

【108 中區學測模①】

答：(2)(3)(4)

解：(1)迴歸直線斜率 $m=\dfrac{60-45}{60-30}=\dfrac{1}{2}$

(2)迴歸直線$(y-60)=\dfrac{1}{2}(x-60)$，過點$(40,50)$

(3) $m=r\times\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x} \Rightarrow \dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x} \Rightarrow \dfrac{5}{8}=\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$，$x$的標準差大於$y$的標準差

(4)資料標準化後新數據$\left(x_i', y_i'\right)$，則y'對x'的迴歸直線斜率$=r=0.8$

(5)由y對x的迴歸直線，只能以x_i預測y_i

10. 請問下列選項何者正確？

(1) $\sum\limits_{k=1}^{20} k^2=\sum\limits_{k=11}^{30}(k-10)^2$　(2) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)=\sum\limits_{k=1}^{n} k \times \sum\limits_{k=1}^{n}(k+1)$

(3) $\sum\limits_{k=1}^{m} mn=(1+2+\cdots\cdots+m)n$

(4)若$\left\langle a_k\right\rangle_{k=1}^{3n}$為等比數列，則$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$，$\sum\limits_{k=n+1}^{2n} a_k$，$\sum\limits_{k=2n+1}^{3n} a_k$亦為等比數列

(5)若a、b、c為等比數列，則b必不為0。　【108 中區學測模①】

答：(1)(4)(5)

解：(2)無此規則　(3) $\sum\limits_{k=1}^{m} mn=m\times(mn)=m^2 n$

11. 設 $f(x)=5x^3+2x^2+2x-3$，則下列敘述哪些正確？

(1) $f\left(3^x\right)=0$ 恰有一個正實根　(2) $x^{10}f(x)+f\left(x^2\right)+f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘數爲 18

(3)不等式 $f(x)\ge 0$ 與 $\dfrac{5x-3}{(x-1)^2}\ge 0$ 的解集合相同　(4) $f\left(\log_{16}12\right)>0$

(5)若 ΔABC 中，$\angle A$ 爲鈍角且 $\sin A$ 爲 $f(x)=0$ 的一個有理根，

則 $\sin(270^\circ-A)+\sin(360^\circ-A)=-\dfrac{1}{5}$。　【108 中區學測模①】

答：(2)(4)

解：由牛頓定理：$f(x)=5x^3+2x^2+2x-3=(5x-3)\left(x^2+x+1\right)$

(1) $3^x=\dfrac{3}{5}$，恰有一個正實根

(2)所求餘式 $=1^{10}f(1)+f\left(1^2\right)+f(1)=3f(1)=3\times 6=18$

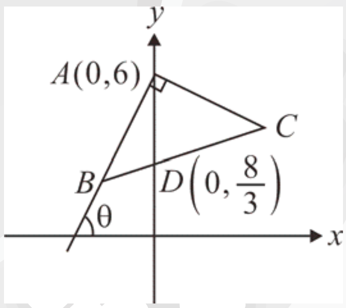
(3) $f(x)\ge 0$ 的解爲 $x\ge\dfrac{3}{5}$。$\dfrac{5x-3}{(x-1)^2}\ge 0$ 的解爲 $x\ge\dfrac{3}{5}$，但 $x\ne 1$

(4) $\log_{16}12=\dfrac{2\log 2+\log 3}{4\log 2}\approx 0.89\cdots>\dfrac{3}{5}$，故 $f\left(\log_{16}12\right)>0$

(5) $\angle A$ 爲鈍角且 $\sin A=\dfrac{3}{5}$，則 $\cos A=-\dfrac{4}{5}$

故 $\sin(270^\circ-A)+\sin(360^\circ-A)=-\cos A-\sin A=\dfrac{1}{5}$

12. 如右圖所示，等腰直角 ΔABC 中，$\angle A$ 爲直角，$A(0,6)$，B，C 分別位於第二象限與第一象限，若直線 AB 與 x 軸正向之夾角爲 θ，且 $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，斜邊 BC 之斜率爲正且與 y 軸交於點 $D\left(0,\dfrac{8}{3}\right)$，則下列敘述哪些正確？



(1) AB 直線方程式爲 $3x-y+6=0$

(2) BC 直線方程式爲 $x-3y+8=0$

(3) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CB}=-30$

(4)若 (x,y) 爲 ΔABC 內部及邊界上之任一點，則 $-3x+y$ 的最大值爲 6

(5) ΔABC 邊上有 9 個點與原點距離爲整數。　【108 中區學測模①】

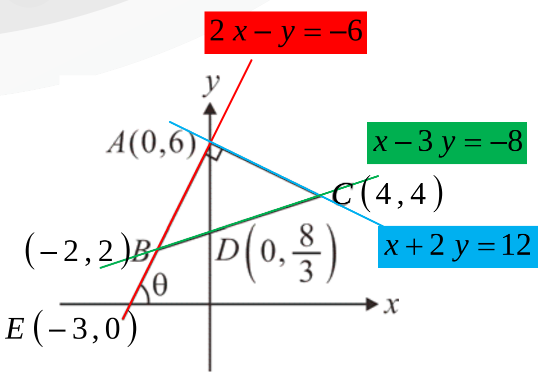
答：(2)

解：(1) $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$A(0,6)$，

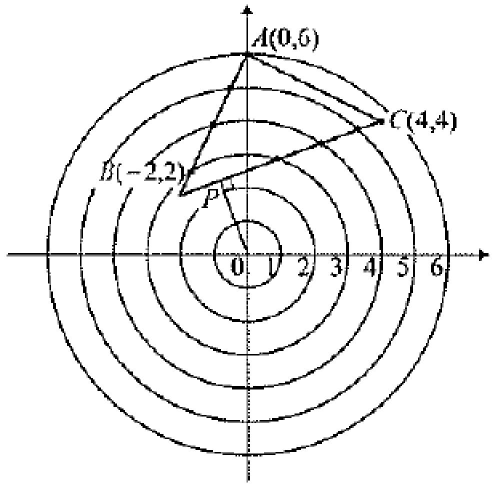
故 $\tan\theta=2$，$B(-3,0)$，$\overleftrightarrow{AB}$：$2x-y+6=0$

(2) $\angle A$ 爲直角，則 $\overleftrightarrow{AB}$：$x+2y-12=0$

$\overleftrightarrow{BC}$ 的斜率爲 $m>0$



$$\tan\frac{\pi}{4}=\left|\frac{m-\left(\frac{-1}{2}\right)}{1+m\times\left(\frac{-1}{2}\right)}\right|\Rightarrow m=\frac{1}{3}$$



(3) $\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$ 交於 $B(-2,2)$，

$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{BC}$ 交於 $C(4,4)$，

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CB}=(2,4)\cdot(-6,-2)=-20$

(4)

(x,y)	$(0,6)$	$(-2,2)$	$(4,4)$
$-3x+y$	6	8	−8

(5) $d\left(O,\overleftrightarrow{BC}\right)=\dfrac{8}{\sqrt{10}}\approx 2.5\cdots$，

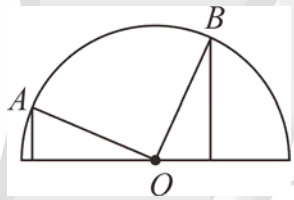
則 ΔABC 邊上有 $2+2+2+1=7$ 個點與原點距離爲整數

第貳部分：選填題（占 40 分）

A. 有一透明建築物名爲「超級圓」，從側面觀察形狀是個標準的半圓，如附圖，有一個小舞台在圓心 O 點。今有兩工人要進行表面維修，分別站於 A、B 兩點，由 A 點看 O 點的俯角爲 $23°20'$，由 B 點看 O 點的俯角爲 $66°50'$，已知 A、B 兩點之高度差爲 370 公尺，求 O 點到 A 點的距離爲________公尺。（四捨五入至整數位）

參考數據

角度	sin	cos
23°00'	0.3907	0.9205
23°10'	0.3934	0.9194
23°20'	0.3961	0.9182
23°30'	0.3987	0.9171
23°40'	0.0414	0.9159
23°50'	0.4041	0.9147



【108 中區學測模①】

答：707

解：$r\sin 66°50'-r\sin 23°20'=r\cos 23°10'-r\sin 23°20'=r\left(0.9194-0.3961\right)=370$

故 $\overline{OA}=\overline{OB}=r\approx 707.05\cdots$

B. 設 x_1，x_2，……，x_{20} 是從1，2，3這三個數中重複取值所構成的數列，

若 $x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_{20}^2=110$，$x_1^3+x_2^3+\cdots\cdots+x_{20}^3=296$，

則 x_1，x_2，……，x_{20} 這 20 筆資料的標準差 $\sigma=$________。【108 中區學測模①】

答：$\sqrt{\dfrac{33}{50}}$

解：1有 a 個，2有 b 個，3有 c 個 $\Rightarrow\begin{cases}a+b+c=20\\a+4b+9c=110\\a+8b+27c=296\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=5\\b=6\\c=9\end{cases}$

$$\sigma=\sqrt{\frac{110}{20}-\left(\frac{5+12+27}{20}\right)^2}=\sqrt{\frac{110}{20}-\left(\frac{44}{20}\right)^2}=\sqrt{\frac{33}{50}}$$

C. ΔABC 中，A 的內角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，$\overline{BD}=5$，$\overline{CD}=7$，$\angle ABC=60^\circ$，求 $\overline{AD}=$________。 【108 中區學測模①】

答：$\frac{5}{2}\sqrt{7}$

解：A 的內角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，$\overline{BD}=5$，$\overline{CD}=7$，故 $\overline{AB}=5t$，$\overline{AC}=7t$，

ΔABC 中，$\cos 60^\circ=\dfrac{(5t)^2+12^2-(7t)^2}{2\times 5t\times 12}\xrightarrow{t>0} t=\dfrac{3}{2}$

ΔABD 中，$\cos 60^\circ=\dfrac{\left(\frac{15}{2}\right)^2+5^2-\overline{AD}^2}{2\times\frac{15}{2}\times 5}\Rightarrow \overline{AD}=\dfrac{5\sqrt{7}}{2}$

D. 若 x 的一元二次方程式 $x^2-\left(\log_{\sqrt{3}}a\right)x+2\log_3 a+3=0$ 有兩相異實根，則 a 的範圍是________或________。 【108 中區學測模①】

答：$a>27$ 或 $0<a<\frac{1}{3}$

解：$x^2-\left(2\log_3 a\right)x+\left(2\log_3 a+3\right)=0$ 有兩相異實根，

$$\begin{cases}\text{判別式}:\left(2\log_3 a\right)^2-4\times\left(2\log_3 a+3\right)>0\\ \text{真數}:a>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_3 a>3\text{或}\log_3 a<-1\\ a>0\end{cases}$$

$\Rightarrow a>27$ 或 $0<a<\dfrac{1}{3}$

E. 設 $f(x)=5^{x+1}$ 的圖形 Γ 交 y 軸於 A 點，且 Γ 上一點 B 在 x 軸正向的投影點為 C，已知 ΔABC 的面積為 5^{14}，若 B 點的 x 坐標落在正整數 n 與 $n+1$ 之間，則 $n=$________。 【108 中區學測模①】

答：11

解：$A(0,5)$，$B\left(t,5^{t+1}\right)$，$C(t,0)$，$t>0$

$\Delta ABC=\dfrac{1}{2}\times 5^{t+1}\times t=5^{14}\xrightarrow{f(t)=\frac{1}{2}\times 5^{t+1}\times t-5^{14}}\begin{cases}f(11)<0\\ f(12)>0\end{cases}$。由勘根定理知：$n=11$

F. A、B、C、D 四人在足球場上踢球，將足球場坐標化後，這四人的位置分別對應的坐標為 $A(1,2)$、$B(3,4)$、$C(4,5)$、$D(7,3)$，球在 A 腳下，當 A 以秒速 $\sqrt{2}$ 公尺的速度跑向 B 時，同一時間 C 以秒速 $\sqrt{13}$ 公尺的速度跑向 D，B、D 不動，A 要將球傳給 C，試問________秒後有最短傳球距離。 【108 中區學測模①】

答：$\dfrac{3}{13}$

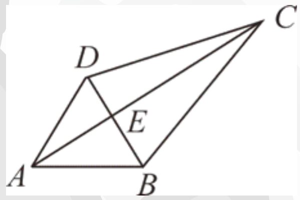
解：$\overrightarrow{AB}=(2,2)//(1,1)$、$\overrightarrow{CD}=(3,-2)$，

A 秒速 $\sqrt{2}$ 、C 秒速 $\sqrt{13}$ ，故 $A\in\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\end{cases}$ 、$C\in\begin{cases}x=4+3t\\y=5-2t\end{cases}$，

$$\overline{AC}=\sqrt{(3+2t)^2+(3-3t)^2}=\sqrt{13t^2-6t+18}=\sqrt{13\left(t-\frac{3}{13}\right)^2+\frac{225}{13}}$$

當 $t=\dfrac{3}{13}$ 時，有最短距離 $\dfrac{15}{\sqrt{13}}$

G. 如右圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 相交於 E ，已知 $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}$，求 ΔABE 面積：ΔCDE 面積的比值 $=$________。【108 中區學測模①】



答：$\dfrac{3}{8}$

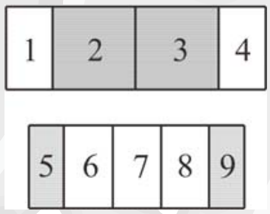
解：$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}$，$B$ 、D 、E 共線。

故 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AF}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ ，且 $\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{AE}$ （亦即：$\overrightarrow{EC}=4\overrightarrow{AE}$ ）

令 $\Delta ADE=2t$ 、$\Delta ABE=3t$ 、$\Delta CDE=8t$ 、$\Delta CBE=12t$

ΔABE 面積：ΔCDE 面積 $=3:8$

H. 現有9台不同的汽車，包含1台休旅車，4台轎車，4台小轎車，其中小林夫妻有1台轎車及1台小轎車。停車場配置圖如右圖，編號2、3停車位三種車型都能停，編號1、4、6、7、8只能停轎車及小轎車，編號5、9只能停小轎車，小林夫妻的車子一定要相鄰，試問這9台車有________種不同的停車方式。【108 中區學測模①】



答：3168

解：$\underbrace{2!\times(2)}_{\substack{\text{小林車在}1,2\\(\text{小林車在}3,4)}}\times\underbrace{1}_{\substack{\text{休旅車在}3\\(\text{休旅車在}2)}}\times\underbrace{P_3^4}_{\text{轎車在}4,6,7,8\text{之三}}\times\underbrace{3!}_{\text{其餘小轎車}}=576$

$\underbrace{1\times(2)}_{\substack{\text{小林車在}5,6\\(\text{小林車在}7,8)}}\times\underbrace{2}_{\text{休旅車在}2,3\text{之一}}\times\underbrace{P_3^5}_{\text{轎車}}\times\underbrace{3!}_{\text{其餘小轎車}}=1440$

$\underbrace{2!\times(2)}_{\substack{\text{小林車在}6,7\\(\text{小林車在}7,8)}}\times\underbrace{2}_{\text{休旅車在}2,3\text{之一}}\times\underbrace{P_3^4}_{\text{轎車在}}\times\underbrace{3!}_{\text{其餘小轎車}}=1152$

合計 $=576+1440+1152=3168$ 種