全國高中 109 年(108 學年度)
高三上第三次學測模擬考數學(108-3)試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、單選題（占 30 分）

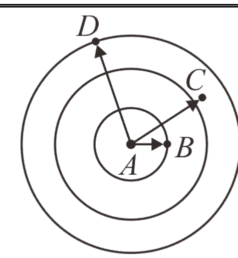
1. $\log_2|x+1|-\log_2|x-1|=1$的實數解有幾個？
   (1) 0　(2) 1　(3) 2　(4) 3　(5) 4 。

答：(3)

解：原式 $\Rightarrow \log_2\dfrac{|x+1|}{|x-1|}=\log_2 2 \Rightarrow \dfrac{|x+1|}{|x-1|}=2 \Rightarrow |x+1|=|2x-2|$

$\Rightarrow (3x-1)(x-3)=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{3}$ 或 3

2. 如圖所示，平面上有 A 、 B 、 C 、 D 四個定點，並以 A 為圓心， r 、 $2r$ 、 $3r$ 為半徑作三個同心圓，若 B 、 D 分別落在半徑為 r 與 $3r$ 的同心圓上，且 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{170}$ ，請以附圖估計 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ 的值最接近下列哪個整數？



   (1) -20　(2) -7　(3) 13　(4) 20　(5) 26 。

答：(2)

解：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta_1 \fallingdotseq r\cdot 2r=\sqrt{170}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos\theta_2 \fallingdotseq r\cdot(-r)\fallingdotseq -\dfrac{\sqrt{170}}{2}\fallingdotseq -7$

3. 從 $0,1,2,\cdots\cdots,9$ 中選出三個不同數字組成四位數（其中的一個數字用兩次），如 5242 。這樣的四位數共有幾個？
   (1) 1692　(2) 3672　(3) 3708　(4) 3888　(5) 4320 。

答：(4)

解：$00ab \Rightarrow C^9_2\times\left(\dfrac{4!}{2!}-3!\right)=216$

$0aab \Rightarrow C^9_2 C^2_1\times\left(\dfrac{4!}{2!}-\dfrac{3!}{2!}\right)=648$

$aabc \Rightarrow C^9_3 C^3_1\times\dfrac{4!}{2!}=3024$

合計 $216+648+3024=3888$

4. O 為原點，已知直線 $y=mx$ 與對數函數 $y=\log_2 x$ 的圖形交於 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 兩點。若 $8\overline{OA}=\overline{OB}$，則 x_1 的值為下列哪一個選項？
(1) $2^{\frac{3}{7}}$ (2) $2^{\frac{3}{8}}$ (3) $2^{\frac{4}{9}}$ (4) $2^{\frac{2}{5}}$ (5) $\sqrt{2}$。

答：(1)

解：$8\overline{OA}=\overline{OB} \Rightarrow A(x_1, y_1)$，$B(8x_1, 8y_1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1=\log_2 x_1 \\ 8y_1=\log_2 (8x_1) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{8}=\frac{\log_2 x_1}{3+\log_2 x} \Rightarrow \log_2 x_1=\frac{3}{7} \Rightarrow x_1=2^{\frac{3}{7}}$$

5. 小明利用星期四到星期日四天，安排北臺灣旅遊，四天共安排兩個整日行程及四個半日行程，其中整日行程有陽明山、九份；半日行程有淡水、故宮、101大樓、西門町。半日行程僅安排於上午或下午，為了旅遊品質，小明增加了幾個限制，

限制一：星期六、星期日的行程不安排九份

限制二：九份、陽明山的行程不排在相鄰兩天

限制三：西門町的行程不排在上午

試問小明四天的旅遊行程共有幾種排法？

(1) 24 (2) 36 (3) 48 (4) 60 (5) 72。

答：(2)

解：週四（九份）$\Rightarrow C_1^2$ (陽明山六日) $\times C_1^2$ (西門町下午) $\times 3!=24$

週五（九份）$\Rightarrow C_1^1$ (陽明山日) $\times C_1^2$ (西門町下午) $\times 3!=12$

合計：$24+12=36$（種）

6. 已知一個線性規劃問題的可行解區域為四邊形 $ABCD$ 及其內部，其中 $A(7,6)$，$B(-1,8)$，$C(-5,5)$，$D(2,3)$。今增加一個限制條件 $5x+2y\le k$，當 $a<k<b$ 時，新的限制條件會讓可行解區域變為五邊形 $BCDEF$ 及其內部，其中 E、F 分別在原可行解區域邊界 $\overline{AD}$、$\overline{AB}$ 上，則 $b-a$ 之最大值為下列哪一個選項？

(1) 5 (2) 26 (3) 31 (4) 36 (5) 52。

答：(3)

解：$5x+2y=k\begin{cases}過(2,3)\Rightarrow k=16\\ 過(7,6)\Rightarrow k=47\end{cases}\Rightarrow 16<k<47$

二、多選題（占 35 分）

7. 設 a_1、r 均為正數，已知數列〈a_n〉是首項為 a_1，公比為 r 的等比數列，設 $b_n=\log a_n$，試選出正確的選項：
(1)數列〈b_n〉為公差大於零的等差數列 (2)數列〈b_n〉為公差小於零的等差數列
(3)若 $b_n=1+\frac{n}{2}$，則 $a_1=10\sqrt{10}$ (4)若 $b_n=1+\frac{n}{2}$，則 $a_1=10$
(5)若 $b_n=1+\frac{n}{2}$，則 $r=\sqrt{10}$。

答：(3)(5)

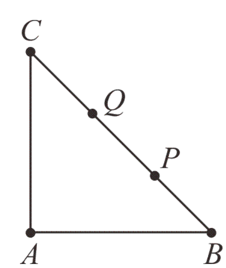
解：(1)(2) $b_{n+1}-b_n=\log a_{n+1}-\log a_n=\log\frac{a_{n+1}}{a_n}=\log r$

當 $0<r\le 1$，公差 $\log r<0$，當 $r\ge 1$，公差 $\log r\ge 0$

(3)(4)(5) $b_1=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=\log a_1\Rightarrow a_1=10^{\frac{3}{2}}=10\sqrt{10}$

公差 $=\frac{1}{2}=\log r\Rightarrow r=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$

8. 等腰 ΔABC 中，$\angle BAC=90°$，P、Q 為斜邊 $\overline{BC}$ 上的三等分點，如圖所示，試選出正確的選項：



(1) $\cos\angle PAQ=\frac{4}{5}$ (2) $\sin\angle PAQ=\sin\angle PAB$
(3) $\overline{AQ}\sin\angle PAQ=\overline{AB}\sin\angle PAB$ (4) $\left(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AQ}\right)//\overrightarrow{BC}$
(5) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$。

答：(1)(3)(4)(5)

解：$A(0,0)$，$B(3,0)$，$C(0,3)$，$P(2,1)$，$Q(1,2)$

(1) $\cos\angle PAQ=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AQ}|}=\frac{2+2}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$

(2) $\cos\angle PAB=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|}=\frac{6+0}{\sqrt{5}\times 3}=\frac{2}{\sqrt{5}}\ne\cos\angle PAQ$

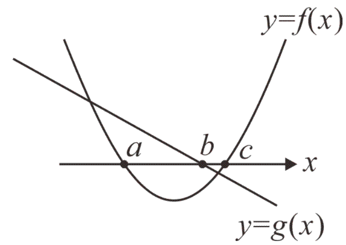
$\Rightarrow \sin\angle PAB=\frac{1}{\sqrt{5}}\ne\sin\angle PAQ=\frac{3}{5}$

(3) $\overline{AQ}\sin\angle PAQ=\sqrt{5}\times\dfrac{3}{5}=\overline{AB}\sin\angle PAB=3\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

(4) $\left(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AQ}\right)=\overrightarrow{QP}\,//\,\overrightarrow{BC}$

(5) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=(3,3)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

9. 如圖， $y=f(x)$為二次函數， $y=g(x)$為一次函數，
其中a 、 c為$y=f(x)$與x軸交點的x坐標，b為$y=g(x)$與x軸交點的x坐標，試選出正確的選項：



(1) $f(x)+g(x)=0$在a 、 b之間有實數解
(2) $f(x)+g(x)=0$在b 、 c之間有實數解
(3) $f(x)g(x)<0$的解為$a<x<c$
(4) $f(x)g(x)\geq 0$的解為$x\leq a$或$b\leq x\leq c$
(5) $\dfrac{f(x)}{g(x)}\leq 0$的解為$a\leq x\leq b$或$x\geq c$ 。

答：(1)(4)

解：(1)(2) $y=f(x)$與$y=-g(x)$交點在區間(a,b)，(c,∞)內
(3) $f(x)g(x)<0$之解為$a<x<b$或$x>c$
(4) $f(x)g(x)\geq 0$之解為$x\leq a$或$b\leq x\leq c$
(5) $\dfrac{f(x)}{g(x)}\leq 0$等同$f(x)g(x)\leq 0$且$g(x)\neq 0$ ，其解為$a\leq x<b$或$x\geq c$

10. 設θ_1、θ_2、θ_3、θ_4分別為第一、二、三、四象限角，且都介於0與2π之間，
已知$|\sin\theta_1|=|\sin\theta_2|=a$，$|\sin\theta_3|=|\sin\theta_4|=b$，試選出正確的選項？

(1) $\cos\theta_2=\sqrt{1-a^2}$ (2) $\theta_1+\theta_2=\pi$ (3)若$b=\dfrac{1}{4}$，則$\theta_3+\dfrac{\pi}{2}<\theta_4$
(4)若$a=b$，則$\theta_4-\theta_2=\pi$ (5)若$a>b$，則$\theta_2-\theta_1>\theta_4-\theta_3$ 。

答：(2)(3)(4)

解：(1) $\cos\theta_2=-\sqrt{1-a^2}$
(2) $\theta_1+\theta_2=\theta_1+(\pi-\theta_1)=\pi$
(3) $\theta_4=2\pi-\sin^{-1}\dfrac{1}{4}$，$\theta_3=\pi+\sin^{-1}\dfrac{1}{4}$
故$\theta_4-\theta_3=\pi-2\sin^{-1}\dfrac{1}{4}>\pi-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$
(4) $\theta_4=2\pi-\theta_1$，$\theta_2=\pi-\theta_1\Rightarrow\theta_4-\theta_2=\pi$
(5) $\theta_2-\theta_1=\left(\pi-\sin^{-1}a\right)-\sin^{-1}a=\pi-2\sin^{-1}a$

$$\theta_4-\theta_3=\left(2\pi-\sin^{-1}b\right)-\left(\pi+\sin^{-1}b\right)=\pi-2\sin^{-1}b$$

但 $a>b\Rightarrow\sin^{-1}a>\sin^{-1}b\Rightarrow\theta_2-\theta_1<\theta_4-\theta_3$

11.

品質標準	優級	果形完整、色澤良好，果面清潔且無病蟲害
	良級	品質次於優級品
重量規格（每個）	L	超過 28 公克
	M	25 ~ 28 公克
	S	未達 25 公克

上表是草莓品質的分級標準，已知富野農場於本屆草莓季出產的草莓，有 $\frac{3}{5}$ 是優級；有 $\frac{2}{5}$ 是良級。在優級的草莓中，重量超過 28 公克的佔 $\frac{2}{3}$，其餘的每個重量至少都有 25 公克；在良級的草莓中，重量超過 28 公克的佔 $\frac{1}{6}$；重量在 25 ~ 28 公克的佔 $\frac{1}{2}$；其餘的每個重量未達 25 公克。草莓要出貨時，會將優級品或重量規格是 L 的草莓，包裝成禮盒販售。根據以上敘述，試選出正確的選項：

(1)富野農場本屆草莓季出產的草莓，重量規格是 M 的佔 $\frac{2}{5}$

(2)富野農場本屆草莓季出產的草莓，重量規格是 L 的超過一半

(3)任取一個富野農場本屆草莓季出產的草莓，已知取到重量規格是 L 的，
則取到優級草莓的機率是 $\frac{6}{7}$

(4)任取一個富野農場本屆草莓季出產的草莓，已知取到的是良級的，
則可以包裝成禮盒販售的機率為 $\frac{1}{15}$

(5)包裝成禮盒販售的草莓，是良級的佔 $\frac{1}{15}$ 。

答：(1)(3)

解：

$$\begin{cases}\text{優}\left(\frac{3}{5}\right)\begin{cases}\geq 28\,g\left(\frac{2}{3}\right)\\ 25\sim 28\,g\left(\frac{1}{3}\right)\end{cases}\\ \text{良}\left(\frac{2}{5}\right)\begin{cases}\geq 28\,g\left(\frac{1}{6}\right)\\ 25\sim 28\,g\left(\frac{1}{2}\right)\\ <25\,g\left(\frac{1}{3}\right)\end{cases}\end{cases}$$

(1) $\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{5}$　　(2) $\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{7}{15}<\frac{1}{2}$

(3) $\dfrac{\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}}{\frac{7}{15}}=\dfrac{6}{7}$ (4) $\dfrac{\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}}{\frac{2}{5}}=\dfrac{1}{6}$ (5) $\dfrac{\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}}{\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}}=\dfrac{1}{10}$

12. 今有兩組資料 x、y 如附表，已知 y 對 x 的最適合直線為 $y=0.4x+13$，若將兩組資料 x、y 分別標準化即 $x_i'=\dfrac{x_i-\mu_x}{\sigma_x}$，$y_i'=\dfrac{y_i-\mu_y}{\sigma_y}$，且 y' 對 x' 的最適合直線為 $y'=0.8x'+k$，試選出正確的選項：

x	6	8	10	12	14
y	16	15	17	a	b

(1) $k=0$ (2)兩組資料 x、y 的相關係數 $r<0.8$ (3) $a+b=37$ (4) $\sigma_y=\sqrt{2}$

(5) $\sigma_{y'}=\dfrac{\sqrt{2}}{0.8}$。

答：(1)(3)(4)

解：(1) $y'=0.8x'+k$ 過 $\left(\overline{X'},\overline{Y'}\right)=(0,0)$ $k=0$

(2) $y'=0.8x'+k$ 的斜率 0.8，恰為 $r_{(x,y)}$

(3) $\left(\overline{X},\overline{Y}\right)=\left(10,\dfrac{48+a+b}{5}\right)\in y=0.4x+13\Rightarrow a+b=37$

(4) $\sigma_x=\sqrt{\dfrac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\overline{X}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{5}\left[(-4)^2+(-2)^2+0^2+2^2+4^2\right]}=\sqrt{8}$

$m=r\times\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}\Rightarrow\sigma_y=0.4\times\dfrac{1}{0.8}\times\sqrt{8}=\sqrt{2}$

(5) $\sigma_{y'}=1$

13.

年度	101	102	103	104	105
二氧化碳排放量(a)（千公噸）	272332	272618	276235	275634	279216
國內生產毛額(b)（十億元）	14607	14929	15529	15654	15891
人口數(c)（千人）	23270	23345	23404	23465	23516
二氧化碳排放密集度(d) $(d)=\dfrac{(a)}{(b)}$（千公噸／十億元）	18.6	18.3	17.8	17.6	17.6
每人平均二氧化碳排放量(e) $(e)=\dfrac{(a)}{(c)}$（千公噸／千人）	11.70	11.68	11.80	11.75	11.87

上表為臺灣地區在民國101~105年二氧化碳排放量與每人平均排放量的調查，請依表格內容選出正確的選項：

(1)二氧化碳排放量(a)的中位數為275634（千公噸）

(2)國內生產毛額(b)每年的成長率皆超過1%

(3)人口數(c)的標準差大於130（千人）

(4)二氧化碳排放密集度(d)與國內生產毛額(b)為負相關

(5)二氧化碳排放量(a)與每人平均二氧化碳排放量(e)的相關係數為1。

答：(1)(4)

解：(1) $272332<272618<275634<276235<279216$

(2) $\dfrac{14929-14607}{14607}\fallingdotseq 2.2\%$，$\dfrac{15529-14929}{14929}\fallingdotseq 4.0\%$

$\dfrac{15654-15529}{15529}\fallingdotseq 0.8\%$，$\dfrac{15891-15654}{15654}\fallingdotseq 1.5\%$

(3)最大離均差130，故標準差<130

(4)正確

(5)資料點不共線

第貳部分：選填題（占35分）

A. 已知數列$a_1+1,\cdots\cdots,a_k+2^{k-1},\cdots\cdots,a_{10}+512$共有十項，且其和為$2^{12}$，則$\sum_{k=1}^{10}a_k$之和為________。

答：3073

解：$\sum_{k=1}^{10}\left(a_k+2^{k-1}\right)=\sum_{k=1}^{10}a_k+\frac{1\left[1-2^{10}\right]}{1-2}=\sum_{k=1}^{10}a_k+\left[2^{10}-1\right]=2^{12}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{10}a_k=2^{12}-2^{10}+1=3073$

B. 已知投擲一個公正的骰子兩次，得到的點數分別為 a 、 b ，則 $\log_{(a+1)}b$ 的值為有理數的機率為________。

答：$\frac{13}{36}$

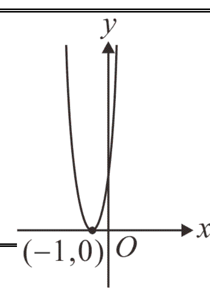
解：
$$\left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=1,2,4 \\ a=2\ ,\ b=1,3 \\ a=3\ ,\ b=1,2,4 \\ a=4\ ,\ b=1,5 \\ a=5\ ,\ b=1,6 \\ a=6\ ,\ b=1 \end{array}\right\}\text{機率}=\frac{3+2+3+2+2+1}{6\times 6}=\frac{13}{36}$$

C. 海面上有一圓形人工島，其圓周在坐標平面上的方程式為 $x^2+y^2-6x-8y+16=0$ ，今一艘觀光遊艇欲從原點沿 $y=kx$ 路徑航行，若此觀光遊艇要在人工島靠岸，則在不計船身大小的情況下，實數 k 的最小值為________。

答：$\frac{7}{24}$

解：圓：$(x-3)^2+(y-4)^2=9$，切線：$kx-y=0$。則：$\frac{|3k-4|}{\sqrt{k^2+1}}\le 3\Rightarrow k\ge\frac{7}{24}$

D. 已知 $f(x)$ 為實係數四次多項式函數，且首項係數為 1，若 $y=f(x)$ 的函數圖形如圖所示，且 $f(1+2i)=0$，則 $f(x)$ 的常數項為________。



答：5

解：$f(x)=(x-1-2i)(x-1+2i)(x+1)^2$

常數項 $f(0)=(-1-2i)(-1+2i)(1)^2=5$

E. ΔABC 中，已知三邊長 $\overline{BC}=5$ 、 $\overline{CA}=6$ 、 $\overline{AB}=7$。若 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 均為單位向量且 $\vec{a}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 垂直，$\vec{b}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 垂直，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 之值為________。

答：$\frac{\pm 1}{5}$

解：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm\cos(A+B)=\pm\cos C=\pm\dfrac{5^2+6^2-7^2}{2\times5\times6}=\pm\dfrac{1}{5}$

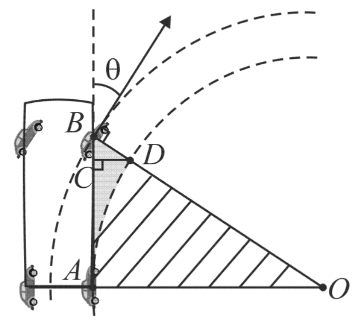
F. 坐標平面上，給定一正ΔABC，已知直線BC的方程式為$x-2y-2=0$，若ΔABC的重心坐標為$(1,2)$，則A點的坐標為________。

答：$(-1,6)$

解：$G(1,2)$，$\overleftrightarrow{BC}$：$x-2y-2=0\Rightarrow\overleftrightarrow{AG}$：$2x+y-4=0$

$\Rightarrow\overleftrightarrow{AG}$與$\overleftrightarrow{BC}$交於$M(2,0)\xrightarrow{\overline{AG}:\overline{GM}=2:1}A(-1,6)$

G. 依汽車基本構造與作用原理，當汽車轉彎的時候，其前後輪前進的軌跡不相同，也就是會產生偏移，此種情形稱為輪差。在轉彎內側者，稱為「內輪差」，而內輪差隨著前後車輪軸距的長度及轉向角度而有所不同。通常車身愈長（即軸距越長）內輪差就愈大。如右圖的陰影區域為內輪差危險區域，斜線區域為安全區，其中D點為距離汽車之理論安全位置，即當行人與汽車之垂直距離$>\overline{CD}$時，理論上能確保行人之安全。假設汽車前後車輪軸距$\overline{AB}=200$公分，轉向角度$\theta=30°$，則理論安全距離$\overline{CD}=$________公分。（四捨五入到整數位）



答：46

解：$\overline{CD}=\overline{BD}\cos30°=\left(\overline{BO}-\overline{AO}\right)\cos30°$

$=\left(400-200\sqrt{3}\right)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=200\sqrt{3}-300\fallingdotseq46.4\cdots\cdots$