全國公私立高級中學108學年度學科能力測驗第三次聯合模擬考試

數學考科解析

考試日期：108年10月29~30日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	2	4	1	2	3	35	1345	14	234	13	134	14	3	0
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
7	3	1	3	3	6	7	2	4	5	±	1	5	−	1
31	32	33												
6	4	6												

第壹部分：選擇題

一、單選題

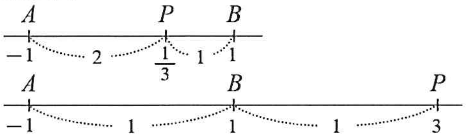
1. $\log_2|x+1|-\log_2|x-1|=1$

$\Rightarrow \log_2\dfrac{|x+1|}{|x-1|}=1\Rightarrow\dfrac{|x+1|}{|x-1|}=2\Rightarrow|x+1|=2|x-1|$

令 $P(x)$, $A(-1)$, $B(1)$

則 $\overline{PA}=2\overline{PB}$，由圖可知 P 有 2 解

故選(3)

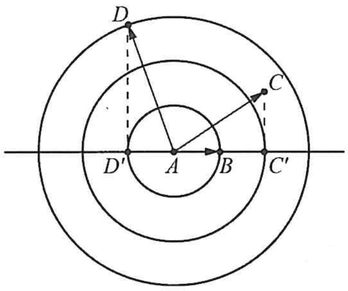


2. 設 C, D 在 $\overleftrightarrow{AB}$ 的投影點分別為 C', D'，依題意以附圖估計，由內積的幾何意義可得

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}|\cdot(-|\overrightarrow{AD'}|)=|\overrightarrow{AB}|\cdot(\dfrac{-1}{2}|\overrightarrow{AC'}|)$

$=\dfrac{-1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC'}|=\dfrac{-1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{-\sqrt{170}}{2}\approx\dfrac{-13}{2}$

接近−7，故選(2)。



3. 情形一：不含0的四位數有 $C^4_2\times9\times1\times8\times7=3024$ (個)

情形二：含1個0的四位數有 $C^3_1\times1\times C^3_2\times9\times8=648$ (個)

情形三：含2個0的四位數有 $C^3_2\times1\times9\times8=216$ (個)

故符合題意的四位數有 $3024+648+216=3888$ (個)

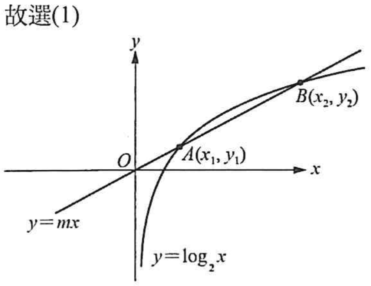
故選(4)

4. 因為 $8\overline{OA}=\overline{OB}$，$x_2=8x_1$，$y_2=8y_1$

$\Rightarrow\begin{cases}y_1=\log_2x_1\\y_2=\log_2x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_1=\log_2x_1\\8y_1=\log_28x_1\end{cases}$

$\therefore 8y_1=\log_28x_1=\log_28+\log_2x_1=3+y_1\Rightarrow y_1=\dfrac{3}{7}$，$x_1=2^{\frac{3}{7}}$

故選(1)



5. (1) 星期四排九份：

陽明山 西門町

$2\times2\times3!=24$

(2) 星期五排九份：

陽明山 西門町

$1\times2\times3!=12$

共36種，故選(2)

6. 令直線 L：$5x+2y=k$，由題意可知 $A(7,6)$ 在直線右側，$B(-1,8)$，$C(-5,5)$，$D(2,3)$ 在直線左側。

所以 $5\times7+2\times6>k$，且 $\begin{cases}5\times(-1)+2\times8<k\\5\times(-5)+2\times5<k\\5\times2+2\times3<k\end{cases}$

$\Rightarrow 16<k<47$，故 $b-a$ 的最大值為 $47-16=31$

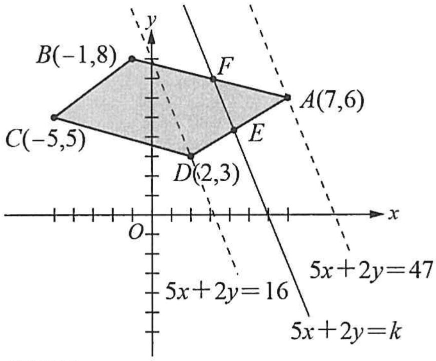
<另解>

由平行線法可知，

$A(7,6)$ 代入直線 L 可得 $35+12=47\geq b$

$D(2,3)$ 代入直線 L 可得 $10+6=16\leq a$

$\therefore 47-16=31$



故選(3)

二、多選題

7. (1) ×：已知 $a_n=a_1\times r^{n-1}$，$b_n=\log a_n=\log a_1+(n-1)\log r$

所以數列 $\langle b_n\rangle$ 為公差是 $\log r$ 的等差數列

當 $0<r<1$ 時，$\log r<0$，

當 $r>1$ 時，$\log r>0$，

當 $r=1$ 時，$\log r=0$

故無法確認公差之正負

(2) ×：同(1)

(3) ○：若 $b_n=1+\dfrac{n}{2}\Rightarrow$ 首項是 $\dfrac{3}{2}$，

則 $\log a_1=\dfrac{3}{2}\Rightarrow a_1=10\sqrt{10}$

(4) ×：同(3)

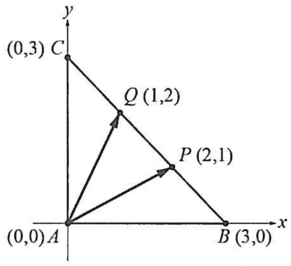
(5) ○：若 $b_n=1+\dfrac{n}{2}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}(n-1)\Rightarrow$ 公差是 $\dfrac{1}{2}$，

則 $\log r=\dfrac{1}{2}\Rightarrow r=\sqrt{10}$

故選(3)(5)

8. (1) ○：建立坐標系如下圖

$\cos\angle PAQ=\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AQ}|}=\dfrac{4}{5}$



(2) ×：由(1)可知 $\sin\angle PAQ=\dfrac{3}{5}$

$\cos\angle PAB=\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow\sin\angle PAB=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ \sin\angle PAQ>\sin\angle PAB$

(3) ○：$\triangle PAQ$ 的面積＝$\triangle PAB$ 的面積（等底同高）

$\Rightarrow\dfrac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{AQ}\sin\angle PAQ=\dfrac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{AB}\sin\angle PAB$

$\Rightarrow\overline{AQ}\sin\angle PAQ=\overline{AB}\sin\angle PAB$

<另解>

$\overline{AQ}\sin\angle PAQ=\sqrt{5}\times\dfrac{3}{5}=3\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\overline{AB}\sin\angle PAB$

(4) ○：$(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AQ})=\overrightarrow{QP}\,//\,\overrightarrow{BC}$

(5) ○：$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC})+(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC})$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

<另解> $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=(3,3)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

故選(1)(3)(4)(5)

9. 如圖(3)可製作下表：

	$x<a$	$x=a$	$a<x<b$	$x=b$
$f(x)$	+	0	−	−
$g(x)$	+	+	+	0
$f(x)+g(x)$	+	+	不一定	−
$f(x)\cdot g(x)$	+	0	−	0
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	+	0	−	不存在

	$b<x<c$	$x=c$	$x>c$
$f(x)$	−	0	+
$g(x)$	−	−	−
$f(x)+g(x)$	−	−	不一定
$f(x)\cdot g(x)$	+	0	−
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	+	0	−

(1) ○：$f(a)+g(a)=g(a)>0$，$f(b)+g(b)=f(b)<0$，由勘根定理可知 $f(x)+g(x)=0$ 在 (a,b) 內必有實數解

(2) ×：在 (b,c) 內的 x 代入 $f(x)+g(x)$ 皆小於 0

$\therefore\ f(x)+g(x)=0$ 在 (b,c) 內無實數解

(3) ×：應為 $a<x<b$ 或 $x>c$

(4) ○：正確

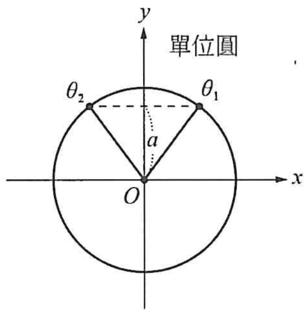
(5) ×：應為 $a\leq x<b$ 或 $x\geq c$

故選(1)(4)

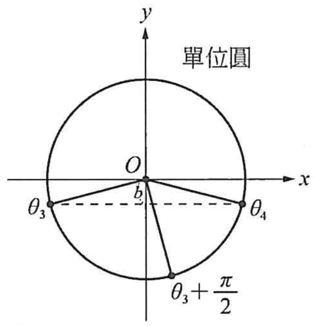
10. (1) ×：θ_2 為第二象限角　$\therefore\ \cos\theta_2<0$，

由平方關係可得 $\cos\theta_2=-\sqrt{1-a^2}$

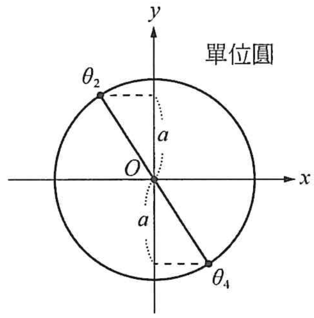
(2) ○：由圖形可知 $\theta_2=\pi-\theta_1$　$\therefore\theta_1+\theta_2=\pi$



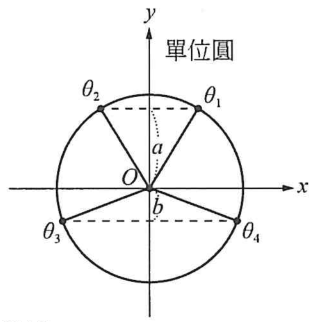
(3) ○：由圖形可知 $\theta_3+\dfrac{\pi}{2}<\theta_4$



(4) ○：由圖形可知 $\theta_4-\theta_2=\pi$

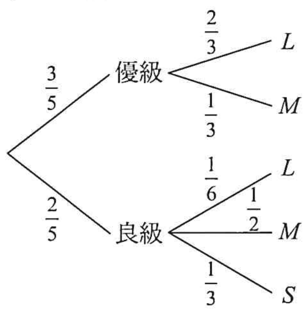


(5) ×：由圖形可知 $\theta_2-\theta_1<\theta_4-\theta_3$



故選(2)(3)(4)

11. 依題意作樹狀圖



(1) ○：M 的有 $\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{5}$

(2) ×：L 的有 $\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{7}{15}<\dfrac{1}{2}$

(3) ○：$\dfrac{\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}}{\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}}=\dfrac{6}{7}$

(4) ×：$\dfrac{\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}}{\frac{2}{5}}=\dfrac{1}{6}$

(5) ×：$\dfrac{\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}}{\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}}=\dfrac{1}{10}$

故選(1)(3)

12. (1) ○：標準化後 y' 與 x' 的平均數均為 0，
所以 y' 對 x' 的迴歸直線必過點 $(0,0)$，所以 $k=0$

(2) ×：因為 y' 對 x' 的迴歸直線的斜率為

$m'=r'\times\dfrac{\sigma_{y'}}{\sigma_{x'}}\Rightarrow r'\times\dfrac{1}{1}=0.8\Rightarrow r'=0.8$

$\therefore r=r'=0.8$

(3) ○：$\because \mu_x=10\quad \therefore \mu_y=0.4\,\mu_x+13=17$

又$\because \dfrac{48+a+b}{5}=17\quad \therefore a+b=37$

(4) ○：$\because r=r'=0.8$　又$\because m=r\times\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$

$0.4=0.8\times\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}\Rightarrow \sigma_y=\dfrac{\sigma_x}{2}$

且 $\sigma_x=\sqrt{\dfrac{(6-10)^2+(8-10)^2+(10-10)^2+(12-10)^2+(14-10)^2}{5}}$

$=2\sqrt{2}$

所以 $\sigma_y=\sqrt{2}$

(5) ×：標準化後 y' 與 x' 的標準差均為 1

故選(1)(3)(4)

13. (1) ○：正確

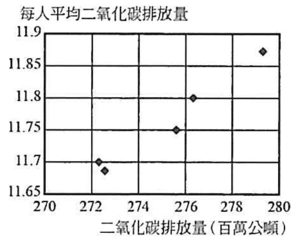
(2) ×：在 103 到 104 年度增加的國內生產毛額
$=15654-15529<15529\times1\%$，即成長率未達 1%

(3) ×：$\mu=23400$

$\sigma=\sqrt{\dfrac{130^2+55^2+4^2+65^2+116^2}{5}}<\sqrt{\dfrac{5\times130^2}{5}}=130$

(4) ○：正確

(5) ×：如右圖，二氧化碳排放量(a)與每人平均二氧化碳排放量(e)的散布圖並沒有在一直線上



故選(1)(4)

第貳部分：選填題

A. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(a_k+2^{k-1})=\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}2^{k-1}=\sum_{k=1}^{10}a_k+1023=2^{12}$，

故 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k=2^{12}-1023=4096-1023=3073$

B. a, b 為 1 到 6 的正整數

$a=1$，$\log_2 b\in\mathbb{Q}$，則 $b=1,2,4$

$a=2$，$\log_3 b\in\mathbb{Q}$，則 $b=1,3$

$a=3$，$\log_4 b\in\mathbb{Q}$，則 $b=1,2,4$

$a=4$，$\log_5 b\in\mathbb{Q}$，則 $b=1,5$

$a=5$，$\log_6 b\in\mathbb{Q}$，則 $b=1,6$

$a=6$，$\log_7 b\in\mathbb{Q}$，則 $b=1$

故 $\log_{(a+1)}b$ 為有理數的機率為 $\dfrac{13}{36}$

C. $x^2+y^2-6x-8y+16=0$

$\Rightarrow(x-3)^2+(y-4)^2=9$

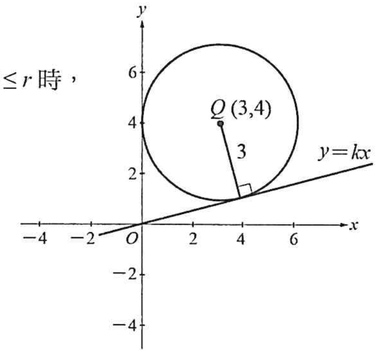
因為圓心到 $y=kx$ 的距離 $\le r$ 時，
觀光遊艇可碰觸人工島

所以 $\dfrac{|3k-4|}{\sqrt{k^2+1}}\le3$

$\Rightarrow 9k^2-24k+16\le9k^2+9$

$\Rightarrow k\ge\dfrac{7}{24}$

$\therefore k$ 的最小值為 $\dfrac{7}{24}$

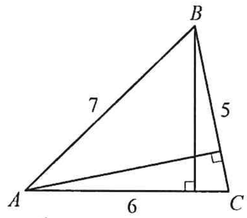


D. 由虛根成雙定理可知，$1\pm2i$ 為 $f(x)=0$ 的兩根，
又 $\deg f(x)=4$，由圖形可知 -1 為 $f(x)=0$ 的二重根，
故 $f(x)=[x-(1+2i)][x-(1-2i)](x+1)^2$
$=(x^2-2x+5)(x+1)^2$
所以 $f(x)$ 的常數項為 $f(0)=5$

E. 因為 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 垂直 $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$，

所以 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 兩向量的夾角為 $\angle C$ 或 $\angle C$ 的補角

且 $\cos C=\dfrac{5^2+6^2-7^2}{2\times5\times6}=\dfrac{1}{5}$



所以 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=1\times1\times\cos(\pi-C)=-\dfrac{1}{5}$

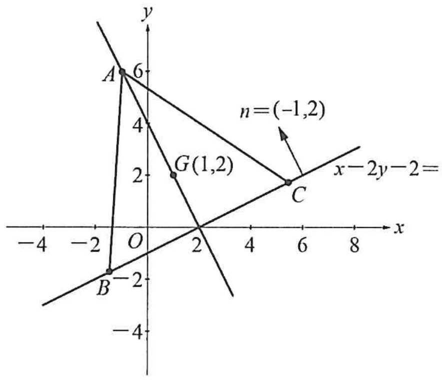
或 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=1\times1\times\cos C=\dfrac{1}{5}$，故 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\dfrac{\pm1}{5}$

F. G 到 $\overleftrightarrow{BC}$ 的距離為 $\dfrac{|-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}\Rightarrow\overline{AG}=2\sqrt{5}$

由坐標平面上的相對位置，可取法向量 $(-1,2)$，

則 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OG}+2\sqrt{5}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{5}},\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$=(1,2)+(-2,4)=(-1,6)$



G. 由圖可知 $\angle O=\angle BDC=30°$

且 $\overline{DO}=\overline{AO}=\dfrac{200}{\tan30°}=200\sqrt{3}$，$\overline{BO}=\dfrac{200}{\sin30°}=400$

得 $\overline{BD}=\overline{BO}-\overline{DO}=400-200\sqrt{3}$

則 $\overline{CD}=\overline{BD}\cos30°=(400-200\sqrt{3})\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=200\sqrt{3}-300\approx346.4-300$

$=46.4\approx46$